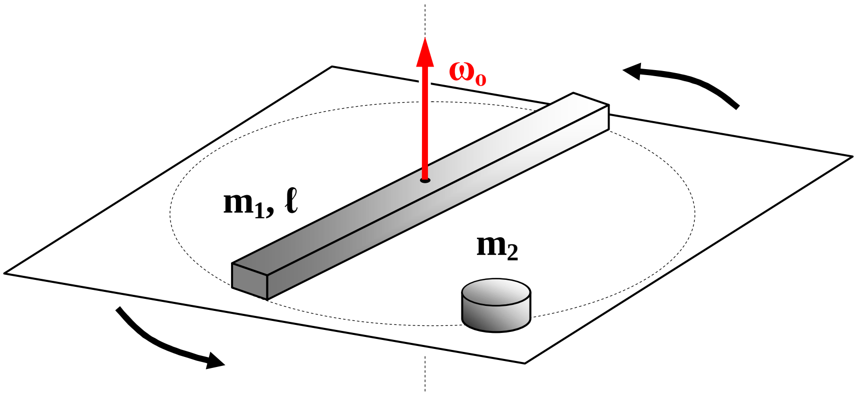
Ελαστική κρούση στρεφομένης ράβδου με ακίνητο σώμα



Ράβδος μήκους **ℓ** και μάζας $\mathbf{m_1}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και μπορεί να μεταφέρεται ή να περιστρέφεται ελεύθερα πάνω σ' αυτό. Δίνουμε στη ράβδο γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega_o}$ ώστε να περιστρέφεται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Τοποθετούμε στο τραπέζι σώμα μάζας $\mathbf{m_2}$ σε κατάλληλη θέση ώστε να συγκρουστεί με το άκρο της στρεφομένης ράβδου. Η κρούση είναι ελαστική, το σώμα ήταν ακίνητο αρχικά και κινείται μετά την κρούση μεταφορικά πάνω στο επίπεδο. Ζητούνται:

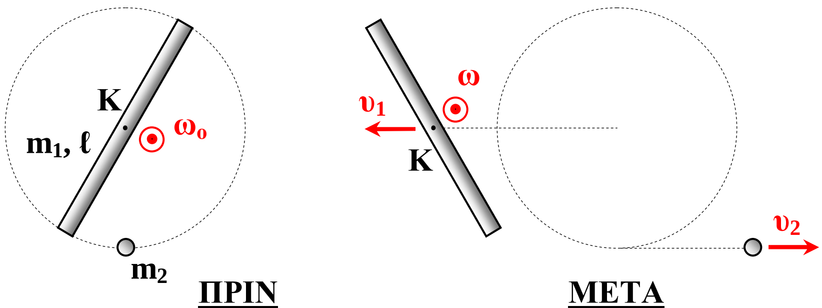
1. Να εκφραστούν οι μεταφορικές ταχύτητες $\boldsymbol{\upsilon_1}$, $\boldsymbol{\upsilon_2}$ των δύο σωμάτων και η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ της ράβδου σε συνάρτηση με το λόγο $\boldsymbol{\lambda = m_1/m_2}$ των μαζών ράβδου – σώματος.

2. Να υπολογιστεί ο λόγος $\boldsymbol{\lambda = m_1/m_2}$ των δύο μαζών ώστε, μετά την ελαστική τους κρούση, η ράβδος να μην περιστρέφεται. Να περιγράψετε τις κινήσεις των δύο σωμάτων μετά την κρούση στην περίπτωση αυτή.

3. Να υπολογιστούν οι τιμές των μεγεθών της ερώτησης ***(1)*** αν $\mathbf{m_1 << m_2}$ (αν για παράδειγμα το σώμα μάζας $\mathbf{m_2}$ είναι ένα ακλόνητο εμπόδιο).

Δίνεται: $\mathbf{I_{ράβδου}} = {}^{1}/_{12}\cdot \mathbf{m}\boldsymbol{\ell}^2$, τα σύμβολα αντιστοιχούν σε μέτρα μεγεθών.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ



1. Στο πιο πάνω σχήμα βλέπουμε σε κάτοψη τα δύο σώματα πριν και μετά την ελαστική τους κρούση.

Ισχύουν οι αρχές διατήρησης ορμής, στροφορμής και μηχανικής (τελικά κινητικής) ενέργειας, έτσι έχουμε:

$$0 + 0 = -m_1 \cdot \upsilon_1 + m_2 \cdot \upsilon_2 \Longrightarrow \boxed{\lambda \cdot \upsilon_1 = \upsilon_2}$$

$$I \cdot \omega_o + 0 = I \cdot \omega + m_2 \cdot \upsilon_2 \cdot \ell/2 \Longrightarrow$$

$$\tfrac{1}{12} \cdot m_1 \cdot \ell^2 \cdot \omega_o = \tfrac{1}{12} \cdot m_1 \cdot \ell^2 \cdot \omega + m_2 \cdot \upsilon_2 \cdot \ell/2 \Longrightarrow \boxed{(\omega_o - \omega) \cdot \ell = 6 \cdot \upsilon_1}$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega_o^2 + 0 = \tfrac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_2^2 \Longrightarrow$$

$$\tfrac{1}{12} \cdot m_1 \cdot \ell^2 \cdot \omega_o^2 + 0 = \tfrac{1}{12} \cdot m_1 \cdot \ell^2 \cdot \omega^2 + m_1 \cdot \upsilon_1^2 + m_2 \cdot \upsilon_2^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda \cdot (\omega_o^2 - \omega^2)\, \ell^2 = 12 \cdot \lambda \cdot \upsilon_1^2 + 12 \cdot \upsilon_2^2 \Longrightarrow$$

$$\lambda \cdot (\omega_o^2 - \omega^2)\, \ell^2 = 12 \cdot \lambda \cdot \upsilon_1^2 + 12 \cdot \lambda^2 \cdot \upsilon_1^2 \Longrightarrow (\omega_o^2 - \omega^2) \cdot \ell^2 = 12 \cdot (1+\lambda) \cdot \upsilon_1^2$$

και διαιρώντας με τη σχέση της στροφορμής έχουμε:

$$\boxed{(\omega_o + \omega) \cdot \ell = 2 \cdot (1+\lambda) \cdot \upsilon_1}$$

Με επίλυση του συστήματος παίρνουμε:

$$\boxed{\upsilon_1 = \frac{\omega_0 \cdot \ell}{\lambda + 4}} \quad \boxed{\upsilon_2 = \frac{\lambda \cdot \omega_0 \cdot \ell}{\lambda + 4}} \quad \text{και} \quad \boxed{\omega = \frac{\lambda - 2}{\lambda + 4} \cdot \omega_0}$$

2. Θέτουμε στις πιο πάνω σχέσεις $\omega = 0$ και έχουμε:

$$0 = (\lambda - 2) \cdot \omega_o / (\lambda + 2) \Longrightarrow \boxed{\lambda = 2}, \quad \text{δηλαδή} \quad \boxed{m_1 = 2 \cdot m_2}$$

Στην περίπτωση αυτή τα δύο σώματα εκτελούν μεταφορικές κινήσεις μόνο, σε αντίθετες κατευθύνσεις και με αντίθετες ορμές (αφού η συνολική ορμή είναι μηδενική).

Η ράβδος διατηρείται συνεχώς κάθετη προς τις διευθύνσεις των ταχυτήτων.

Τα μέτρα των δύο ταχυτήτων είναι:

$$\boxed{\upsilon_1 = \frac{\omega_0 \cdot \ell}{6}} \quad \text{και} \quad \boxed{\upsilon_2 = \frac{2 \cdot \omega_0 \cdot \ell}{6}}$$

3. Εφόσον $\mathbf{m_1 << m_2}$ ο λόγος $\boldsymbol{\lambda = m_1/m_2}$ τείνει στο μηδέν, οπότε:

$\boxed{\mathbf{\upsilon_1 = \frac{\omega_0 \cdot \ell}{4}}}$ $\boxed{\mathbf{\omega = -\frac{\omega_0}{2}}}$ και φυσικά $\boxed{\mathbf{\upsilon_2 = 0}}$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Αξιοσημείωτο κατά την κρούση αυτή είναι το εξής:

Ενώ κανένα από τα δύο σώματα πριν από την κρούση δεν κινείται μεταφορικά, μετά την κρούση αποκτούν και τα δύο μεταφορικές ταχύτητες (προς αντίθετες κατευθύνσεις).