Μία ιστορία στην……ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Κατά την περσινή σχολική χρονιά, στα πλαίσια της Π.Δ.Σ. προσπάθησα, αντί να λύσω ασκήσεις που μπορεί να υπάρχουν σε πολλά διαφορετικά εξωσχολικά βιβλία, να δω εάν οι μαθητές μου έχουν πραγματικά κατανοήσει μερικά βασικά πράγματα πάνω στην εξαναγκασμένη ταλάντωση, εξετάζοντας το θέμα αυτό ποιοτικά. Απέδειξα λοιπόν στους μαθητές τους τύπους του πλάτους στην εξαναγκασμένη ταλάντωση καθώς και την εφθ (όπου θ η διαφορά φάσης απομάκρυνσης και διεγείρουσας δύναμης) χρησιμοποιώντας απλά μαθηματικά, που ήδη έχουν διδαχθεί σε προηγούμενες τάξεις.

Όταν ένα σώμα εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ενεργούν πάνω του τρεις δυνάμεις:

α. Η δύναμη επαναφοράς $F_{επ}$=-Dx , που είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που προκαλούν την ελεύθερη και αμείωτη ταλάντωση,

β. Η δύναμη αντίστασης $F_{αντ}$=-bu,

γ. Η εξωτερική περιοδική δύναμη διέγερσης $F_δ$, η οποία ασκείται στο σώμα από το διεγέρτη με μια συχνότητα που λέγεται συχνότητα διέγερσης $f_δ$.

Εάν η εξωτερική περιοδική δύναμη είναι της μορφής $F_δ=F_{max}ημω_δt$, τότε η εφαρμογή του 2ου Νόμου του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{επ} + \vec{F}_{αντ} + \vec{F}_{δ} = m\vec{a}$$
$$\Rightarrow -Dx - bu + F_{max}ημω_δt = ma$$
$$\Rightarrow ma + Dx + bu = F_{max}ημω_δt$$
$$\Rightarrow \mathbf{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + Dx = F_{max}ημω_δt}$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$\mathbf{x=Aημ(ω_δt-θ)}$$

όπου $\mathbf{A = \frac{F_{max}}{\sqrt{(D - mω_δ^2)^2 + b^2ω_δ^2}}}$ (1) και $\mathbf{εφθ = \frac{bω_δ}{D - mω_δ^2}}$ (2)

Βλέπουμε ότι θ είναι η διαφορά φάσης μεταξύ της απομάκρυνσης x και της διεγείρουσας δύναμης. Παρατηρούμε ότι :

- Το πλάτος τη εξαναγκασμένης ταλάντωσης δεν εξαρτάται από τον χρόνο (όπως συμβαίνει στην φθίνουσα ταλάντωση) και
- Το πλάτος της εξαναγκασμένης ταλάντωσης δεν είναι μια ποσότητα που παίρνει αυθαίρετες τιμές , αλλά **εξαρτάται από τη γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη**.

Απόδειξη των σχέσεων $A = \dfrac{F_{max}}{\sqrt{(D - m\omega_\delta^2)^2 + b^2\omega_\delta^2}}$ **(1)** και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{b\omega_\delta}{D - m\omega_\delta^2}$ **(2)** ***με τη χρήση περιστρεφόμενων διανυσμάτων***

Στο διάγραμμα (1) παριστάνονται τα περιστρεφόμενα διανύσματα για την απομάκρυνση x, τη δύναμη διέγερσης και την ταχύτητα ταλάντωσης μια τυχαία χρονική στιγμή t.

Το διάνυσμα της διεγείρουσας δύναμης(F_{max}) έχει σχεδιαστεί να έπεται του διανύσματος της απομάκρυνσης κατά θ rad, ενώ το διάνυσμα της ταχύτητας($u_{max}=\omega_\delta A$) έπεται του διανύσματος της απομάκρυνσης κατά $\frac{\pi}{2}$rad.

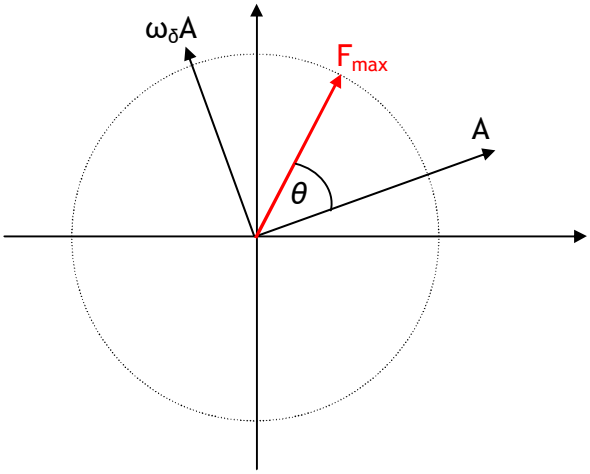
Στο διάγραμμα (2) έχουν προστεθεί επίσης τα περιστρεφόμενα διανύσματα της δύναμης επαναφοράς($F_{\varepsilon\pi,max}=DA$) και της δύναμης αντίστασης ($F_{\alpha\nu\tau,max}=bu_{max}=b\omega_\delta A$).

Επειδή η δύναμης επαναφοράς είναι διαρκώς αντίθετη της απομάκρυνσης x, το διάνυσμά της έχει σχεδιαστεί να **προηγείται του διανύσματος της απομάκρυνσης κατά π rad**, ενώ η δύναμη αντίστασης είναι διαρκώς αντίθετη από την ταχύτητα, οπότε το περιστρεφόμενο διάνυσμα της **προηγείται του διανύσματος της ταχύτητας κατά π rad.**

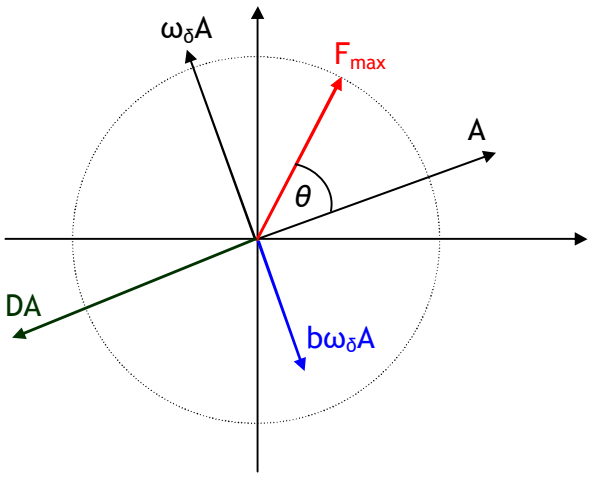
Η συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ενεργούν στο σώμα είναι $\Sigma F=ma=-m\omega_\delta^2 x$.

Στο διάγραμμα (3), έχει προστεθεί το διάνυσμα της συνισταμένης όλων των δυνάμεων, το οποίο προφανώς θα είναι ομόρροπο του διανύσματος της δύναμης επαναφοράς και θα έχει μέτρο $m\omega_\delta^2 A$.

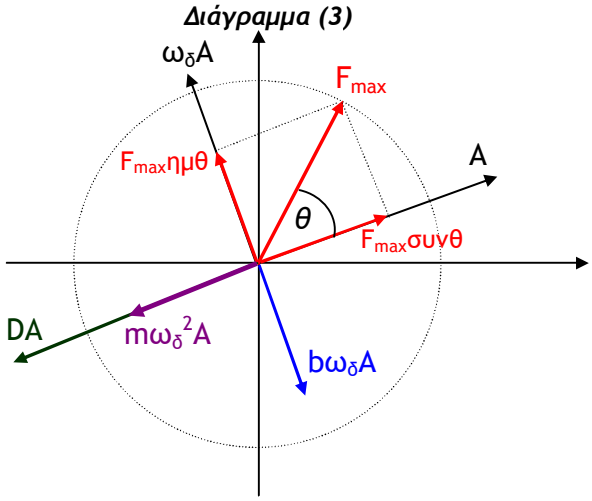
Διάγραμμα (1)



Διάγραμμα (2)



Διάγραμμα (3)



Θα πρέπει το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων που **εκφράζουν δυνάμεις** να έχει μέτρο $m\omega_\delta^2 A$.Άρα, αναλύοντας την F_{max} σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες F_{max}συνθ και F_{max}ημθ έχουμε:

Άξονας ταχύτητας: F_{max}ημθ=$b\omega_\delta A$ (3)

Άξονας απομάκρυνσης: $DA-F_{max}$συνθ=$m\omega_\delta^2 A \Rightarrow F_{max}$συνθ=$DA-m\omega_\delta^2 A=(D-\omega_\delta^2)A$ (4)

Με διαίρεση κατά μέλη των (3)μ και (4) έχουμε:

$$\frac{F_{max}\cdot \eta\mu\theta}{F_{max}\cdot \sigma\upsilon\nu\theta}=\frac{b\omega_\delta A}{(D-m\omega_\delta^2)A}\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta}=\frac{\mathbf{b\omega_\delta}}{\mathbf{D-m\omega_\delta^2}}$$

Επίσης υψώνοντας τις (3) και (4) και προσθέτωντας κατά μέλη παίρνουμε:

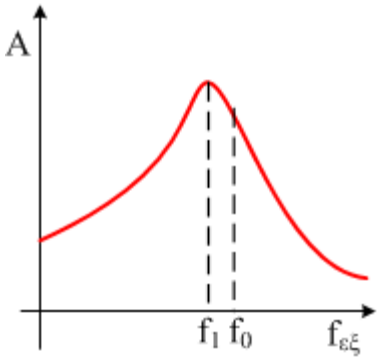
$$F_{max}^2\left(\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)=A^2\left[b^2\omega_\delta^2+(D-m\omega_\delta^2)^2\right]\Rightarrow \mathbf{A}=\frac{\mathbf{F_{max}}}{\sqrt{(\mathbf{D-m\omega_\delta^2})^2+\mathbf{b^2\omega_\delta^2}}}$$

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Το πλάτος (της απομάκρυνσης) γίνεται μέγιστο για μια συχνότητα f_1 λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_0.

Εδώ αρκετά παιδιά έχουν μάθει να ορίζουν το φαινόμενο του συντονισμού ως την κατάσταση κατά την οποία η συχνότητα ταλάντωσης γίνεται ίση με την συχνότητα του διεγέρτη, δηλαδή έχουν μάθει να ορίζουν το φαινόμενο του συντονισμού με βάση τη συχνότητα του διεγέρτη και όχι μέσω της μεγιστοποίησης του πλάτους.

Η παραπάνω αντίληψη είναι προφανώς λάθος, αφού αυτή η μεγιστοποίηση του πλάτους συμβαίνει σε μία συχνότητα διεγέρτη λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα f_o.



Όταν μάλιστα σχεδίασα και την παραπάνω γραφική παράσταση, *ξεκίνησε θύελλα αντιδράσεων ….*

Προσπάθησα λοιπόν να πείσω τους μαθητές γι' αυτό που ισχυριζόμουν.

Συμφωνήσαμε λοιπόν ότι για να γίνει το πλάτος μέγιστο, θα πρέπει ο παρανομαστής στην σχέση (3) να γίνει ελάχιστος.

Θέτουμε λοιπόν:

$$y = \sqrt{(D - m\omega_\delta^2)^2 + b^2\omega_\delta^2}$$
$$\Rightarrow y^2 = (D - m\omega_\delta^2)^2 + b^2\omega_\delta^2 \Rightarrow$$
$$y^2 = D^2 - 2Dm\omega_\delta^2 + m^2\omega_\delta^4 + b^2\omega_\delta^2$$
$$\Rightarrow m^2\omega_\delta^4 + (b^2 - 2Dm)\omega_\delta^2 + D^2 - y^2 = 0$$

Η παραπάνω είναι διτετράγωνη ως προς ω_δ^2 και θα για να έχει πραγματικές ρίζες θα πρέπει Δ≥0, οπότε

$$(b^2 - 2Dm)^2 - 4m^2(D^2 - y^2) \geq 0$$
$$\Rightarrow b^4 - 4Dmb^2 + 4D^2m^2 - 4m^2D^2 + 4m^2y^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow 4m^2y^2 \geq 4Dmb^2 - b^4$$
$$\Rightarrow 4m^2y^2 \geq 4m^2\omega_o^2b^2 - b^4$$
$$\Rightarrow y^2 \geq b^2\left(\omega_o^2 - \frac{b^2}{4m^2}\right)$$
$$\Rightarrow y_{\min} = b\sqrt{\left(\omega_o^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right)} \qquad (5)$$

Με αντικατάσταση στην (3) βρίσκουμε την μέγιστη τιμή A_{max} του πλάτους:

$$\mathbf{A_{max}} = \frac{\mathbf{F_{max}}}{\mathbf{b}\sqrt{\left(\boldsymbol{\omega}_o^2 - \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2m}}\right)^2\right)}} \qquad (6)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) $y=y_{min}$ έχουμε διακρίνουσα Δ=0, και η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα(-β/2α). Οπότε:

$$\omega_\delta^2 = -\frac{b^2 - 2Dm}{2m^2} \Rightarrow \omega_\delta^2 = -\frac{b^2 - 2m^2\omega_o^2}{2m^2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\omega}_\delta = \sqrt{\boldsymbol{\omega}_o^2 - \frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{2m}^2}} \ (7)$$

Τώρα η συζήτηση με τους μαθητές γίνεται πολύ πιο εύκολη.

Από την **εξίσωση (7)** προκύπτουν λοιπόν τα εξής συμπεράσματα:

- Όταν λοιπόν έχουμε συντονισμό, η συχνότητα του διεγέρτη είναι μικρότερη από την ω_o.
- Για πολύ μικρές σταθερές απόσβεσης b, ο αφαιρετέος στην υπόρριζη ποσότητα της εξίσωσης (7) γίνεται πολύ μικρός σχεδόν μηδενικός, οπότε $\omega_\delta \cong \omega_o$. Έτσι, μπορούμε να πούμε αυτό που αναφέρει και το σχολικό βιβλίο, ότι ο συντονισμός συμβαίνει όταν η συχνότητα του διεγέρτη γίνεται ίση με την ιδιοσυχνότητα f_o.

- Γίνεται, φανερό ότι για μεγαλύτερη τιμή σταθερά απόσβεσης, συντονισμός συμβαίνει σε μία συχνότητα διεγέρτη μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα ω_o

Από τις **εξισώσεις (1)** και **(6)** προκύπτουν λοιπόν τα εξής συμπεράσματα:

- Για δεδομένη συχνότητα διεγέρτη, με αύξηση της σταθεράς απόσβεσης b, μειώνεται το πλάτος της ταλάντωσης.
- Για δεδομένη συχνότητα διεγέρτη, με αύξηση της σταθεράς απόσβεσης, μειώνεται η μέγιστη τιμή A_{max} του πλάτους.

Τέλος, από την εξίσωση (2) βλέπουμε όταν $\omega_\delta=\omega_o$ η εφθ δεν ορίζεται, οπότε $\theta=\frac{\pi}{2}$rad, δηλαδή η διεγείρουσα δύναμη είναι συμφασική από την ταχύτητα. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, η διεγείρουσα δύναμη είναι αντίθετη της δύναμης αντίστασης($F_\delta=-F_{\alpha\nu\tau}$). Αυτό εννοούμε, όταν λέμε όταν $\omega_\delta=\omega_o$ μεταφέρεται ενέργεια στον ταλαντωτή κατά βέλτιστο τρόπο.

Πέτρος Καραπέτρος

Λυκειακές Τάξεις Γυμνασίου Μεσοβουνίων