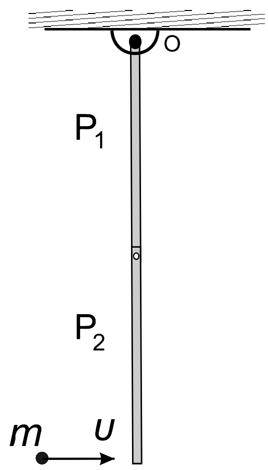
Πλαστική Κρούση σε Διπλό Εκκρεμές

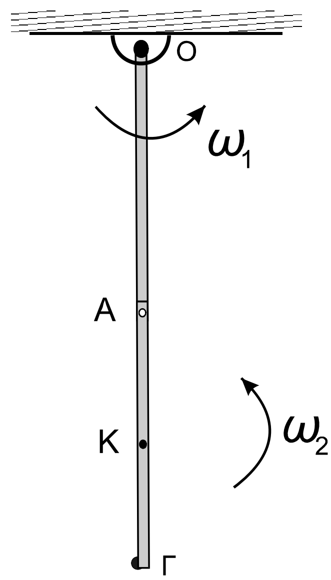
Σε συνέχεια της αρχικής ανάρτησης με τίτλο «Αρχές Διατήρησης» vs «Νόμοι του Νεύτωνα» στην ιστοσελίδα:
http://ylikonet.ning.com/profiles/blogs/archhes-diathereses-vs-nhomoi
η άσκηση αυτή αποτελεί το τρίτο (και τελευταίο) παράδειγμα στο οποίο φαίνεται η «υπεροχή» των νόμων του Νεύτωνα για την επίλυση ενός προβλήματος κρούσης.



Στο διπλανό σχήμα δύο ίδιες ράβδοι P_1 και P_2 (μάζας M και μήκους L η καθεμία) συνδέονται μεταξύ τους με άρθρωση ενώ το πάνω άκρο της P_1 συνδέεται με άρθρωση σε ακλόνητο σημείο. Το σύστημα βρίσκεται αρχικά στην κατακόρυφη θέση ισορροπίας του. Σφαίρα μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα υ συγκρούεται πλαστικά με τη ράβδο P_2 στο κάτω άκρο της .
Να υπολογιστούν οι γωνιακές ταχύτητες των ράβδων αμέσως μετά τη κρούση.

Λύση

1ος τρόπος (διατήρηση στροφορμής)



Έστω ότι αμέσως μετά την κρούση οι ράβδοι αποκτούν γωνιακές ταχύτητες όπως αυτές του σχήματος. Ως προς ποιο όμως σημείο και ποιο σύστημα σωμάτων θα πρέπει να επιλέξουμε για να εφαρμόσουμε διατήρηση της στροφορμής;

Ας πάρουμε τα σημεία με τη σειρά

i) αν διαλέξουμε το O τότε ως σύστημα πρέπει να πάρουμε και τις δύο ράβδους γιατί αν πάρουμε μόνο τη P_1 στο άκρο της A εμφανίζονται εξωτερικές ροπές.

ii) το A για κάθε ράβδο ξεχωριστά δεν μπορούμε να το επιλέξουμε διότι δεν είναι ούτε αδρανειακό σημείο ούτε κέντρο μάζας. Το A και για τις δύο ράβδους μαζί, μπορεί να είναι στιγμιαία το κέντρο μάζας τους αλλά τότε στο O έχουμε δυνάμεις που προκαλούν ροπή (κατά την κρούση)

iii) το κέντρο K της P_2 ,μόνο φυσικά για τη ράβδο P_2 , δεν μπορούμε να το επιλέξουμε διότι και εδώ έχουμε την εμφάνιση ροπών στο άνω άκρο της.

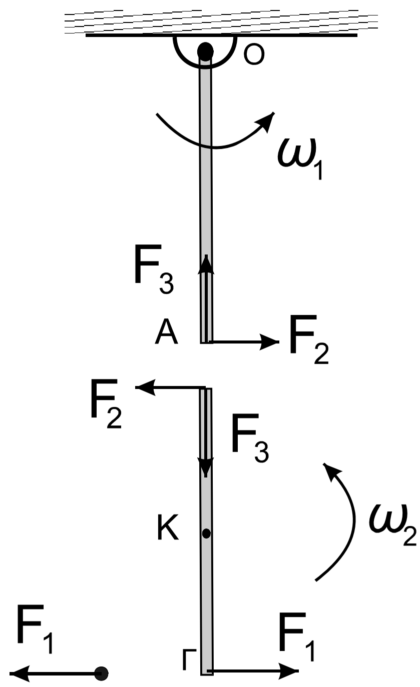
Τι συμπεραίνουμε;
Μόνο μία εξίσωση από την εφαρμογή διατήρησης στροφορμής με 2 αγνώστους !!
Είναι μάταιο να προσπαθήσει να βρει κανείς κινηματικούς περιορισμούς που να συνδέουν τις δύο γωνιακές ταχύτητες. Το σύστημα έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (2 γωνίες).
Αν και δεν μπορούμε να οδηγηθούμε στη λύση της άσκησης, ας δούμε πώς θα έπρεπε να εφαρμόσουμε τη διατήρηση της στροφορμής (ως προς το O και για τις δύο ράβδους.

$L_{αρχ} = mυ2L$

$L_{τελ} = mυ_Γ 2L + I_o ω_1 + I_K ω_2 + Mυ_K 3L/2$

όπου οι δύο τελευταίοι προσθετέοι εκφράζουν το σπιν της P_2 και την τροχιακή στροφορμή της P_2 ως προς το O . (Τα $υ_Γ$ και $υ_K$ εκφράζονται ως συναρτήσεις των $ω_1$ και $ω_2$ όπως θα δούμε παρακάτω).

2ος τρόπος (με νόμους του Νεύτωνα)



Σχεδιάζουμε τις κρουστικές δυνάμεις για κάθε σώμα ξεχωριστά, εφαρμόζοντας τον 3ο ΝΝ.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον 2ο ΝΝ για τη μεταφορική ή/και στροφική κίνηση για κάθε σώμα.

Για τη P_1:
$I_o\, ω_1 - 0 = F_2\, L\, Δt$ (1)

Για τη P_2:
$I_K\, ω_2 - 0 = (F_1 + F_2)(L/2)\, Δt$ (2)
$Mυ_K – 0 = (F_1 - F_2)\, Δt$ (3)

Για τη σφαίρα:
$m(υ_Γ – υ) = - F_1\, Δt$ (4)

Από εδώ μπορούμε να «φτιάξουμε» δύο (ανεξάρτητες) εξισώσεις με απαλοιφή των ωθήσεων: $F_1\, Δt$ και $F_2\, Δt$.
Π.χ. Λύνοντας τις (1) και (4) ως προς τις παραπάνω ωθήσεις και αντικαθιστώντας τες στην (2) έχουμε μία εξίσωση και στην (3) τη δεύτερη εξίσωση.
(ή αξιοποιώντας τη διατήρηση της στροφορμής που βρήκαμε προηγουμένως αρκούμαστε στο να βρούμε μία μόνο εξίσωση, αρκεί … να μη φτιάξουμε την ίδια!)

Φτάσαμε λοιπόν στις 2 εξισώσεις, με αγνώστους ;;;
Μόνο δύο (τις ζητούμενες γωνιακές ταχύτητες) αφού τα $υ_Γ$ και $υ_K$ υπόκεινται σε κινηματικούς περιορισμούς.
Συγκεκριμένα:

$υ_Γ = υ_A + ω_2\, L$ όπου όμως $υ_A = ω_1\, L$ άρα $υ_Γ = (ω_1 + ω_2)L$
ομοίως
$υ_K = υ_A + ω_2\, L/2$ επομένως $υ_K = (2ω_1 + ω_2)L/2$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι : $ω_1 = -\dfrac{6mυ}{(7M + 24m)L}$ και $ω_2 = \dfrac{30mυ}{(7M + 24m)L}$

Πληροφοριακά
Αν η κρούση δεν είχε γίνει στο κατώτερο άκρο της P_2 αλλά σε ένα σημείο της που απέχει απόσταση d από το άνω άκρο της (και θεωρώντας θετικές γωνιακές ταχύτητες αυτές του σχήματος), τότε … προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα :

αν $d < 3L/8$ τότε $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 < 0$ (για $d = 3L/8$ τότε $\omega_2 = 0$)
αν $3L/8 < d < 2L/3$ τότε $\omega_1 > 0$ και $\omega_2 > 0$ (για $d = 2L/3$ τότε $\omega_1 = 0$)
αν $2L/3 < d \leq L$ τότε $\omega_1 < 0$ και $\omega_2 > 0$
οι γωνιακές ταχύτητες είναι ίσες μόνο αν $d = 5L/11$

Σχόλιο – Συμπέρασμα:

Στην αρχική ανάρτηση με τίτλο «Αρχές Διατήρησης» vs «Νόμοι του Νεύτωνα», δεν ήθελα απλά να τονίσω ότι όλες οι «αρχές» δεν είναι πραγματικά αρχές αλλά, παράλληλα, ήθελα να δείξω ότι δεν αποτελούν πανάκεια για τη λύση των προβλημάτων αφού μπορεί :
α) να μην είναι εφαρμόσιμες
β) και όταν είναι, η μη προσεκτική εφαρμογή τους μπορεί να οδηγήσει σε λάθος αποτελέσματα
γ) να μην επαρκούν για την επίλυση του προβλήματος.

Για καθένα από τα (α) , (β) , (γ) προσπάθησα να δώσω και από ένα παράδειγμα.
Η «υπεροχή» των νόμων του Νεύτωνα απέναντι στη διατήρηση ορμής και στροφορμής είναι φανερή. Ας καταφεύγουμε λοιπόν σ' αυτούς, όταν συντρέχει ένας (τουλάχιστον) από τους παραπάνω λόγους.

Στον αγώνα «Αρχές Διατήρησης» vs «Νόμοι του Νεύτωνα»: 0 – 3 (σημειώσατε 2).