Νίκος Σταματόπουλος

«Αρχές Διατήρησης» vs «Νόμοι του Νεύτωνα»

Ερώτημα 1^o : Ποιες από αυτές τις «αρχές» είναι όντως αρχές και ποιες δεν είναι;

Ερώτημα 2^o : Ποιο έχει μεγαλύτερη ισχύ; η «αρχή» ή ο «νόμος»;

Ερώτημα 3^o : Ποιο είναι πιο εύκολο να εφαρμόζουμε σωστά;

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι για λόγους … σοβαρότητας και για να αποφεύγονται διάφοροι συνειρμοί των μαθητών, καλό είναι να διατυπώνονται ως «αρχή της διατήρησης» αντί «αρχή διατήρησης» (ειδικά δε όταν οι δύο λέξεις προφέρονται ως μία!)
Ας προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα παραπάνω ερωτήματα. Οι «αρχές διατήρησης» που «ακούγονται» από τα στόματα συναδέλφων και μαθητών είναι:

1. Αρχή της διατήρησης της ενέργειας
2. Αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας
3. Αρχή της διατήρησης της ορμής
4. Αρχή της διατήρησης της στροφορμής
5. Αρχή της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου
6. Αρχή της διατήρησης του ατομικού αριθμού (στις πυρηνικές αντιδράσεις)

Για το 1^o Ερώτημα: «Ποιες από τις «αρχές» είναι όντως αρχές και ποιες όχι»

Μα τι σημαίνει αρχή στη Φυσική;
Είναι μια πρόταση που φαίνεται να έχει καθολική ισχύ μέσα από τεράστιο αριθμό πειραμάτων που όμως δεν μπορεί ν' αποδειχθεί θεωρητικά. Οι μαθηματικοί αυτές τις προτάσεις τις ονομάζουν αξιώματα. Από την ιστορία της «εξέλιξης» της Φυσικής Επιστήμης έχουμε πάρει το μάθημά μας. Έχοντας κατά νου τις ανατροπές στις αντιλήψεις μας για τα φαινόμενα, μέσα από απρόσμενα πειραματικά αποτελέσματα, παραμένουμε επιφυλακτικοί και γι' αυτό χρησιμοποιούμε μετριοπαθέστερους χαρακτηρισμούς (αρχή αντί αξίωμα).

- **Για το Νο 1 δεν τίθεται θέμα, το θεωρούμε ως αρχή.**
  (όταν περιλαμβάνει τα πάντα, από ισοδυναμία μάζας με ενέργεια, ακτινοβολία, …, μέχρι και ενέργεια κενού.)

- **Ας προχωρήσουμε στο Νο 2 με μία ερώτηση**:

Γιατί το ΘΜΚΕ το λέμε θεώρημα και όχι ΑΜΚΕ;

Απάντηση: *Γιατί προκύπτει από τον* 2^o *νόμο του Νεύτωνα*

Ας το αποδείξουμε (σε μία διάσταση για λόγους ευκολίας)

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F\Rightarrow\quad m\frac{d\upsilon}{dt}\upsilon=F\upsilon\Rightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)=F\frac{dx}{dt}\Rightarrow\quad d\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)=Fdx\Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_{\alpha\rho\chi}}^{\upsilon_{\tau\varepsilon\lambda}} d\left(\frac{1}{2}m\upsilon^2\right)=\int_{x_{\alpha\rho\chi}}^{x_{\tau\varepsilon\lambda}} Fdx\ \Rightarrow\quad \Delta K=W_F$$

Ας εφαρμόσουμε, τώρα, το ΘΜΚΕ (που είναι θεώρημα) στην ειδική περίπτωση συντηρητικού συστήματος. Όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα (σελ.6):

για κάθε συντηρητική δύναμη ισχύει: $W_F=U_{\alpha\rho\chi}-U_{\tau\varepsilon\lambda}$

όπου U η αποκαλούμενη δυναμική ενέργεια.

Τότε από το ΘΜΚΕ με την παραπάνω αντικατάσταση τι προκύπτει ;

$E_{\mu\eta\chi\,(\alpha\rho\chi)}=E_{\mu\eta\chi\,(\tau\varepsilon\lambda)}$ όπου $E_{\mu\eta\chi}=K+U$

δηλαδή ***διατήρηση της μηχανικής ενέργειας*** !

Συμπέρασμα: **Δεν είναι αρχή**, η «διατήρηση της μηχανικής ενέργειας».

Ας καταργήσουμε λοιπόν το ΑΔΜΕ (… εδώ το υπουργείο άλλαξε λογότυπο!)
Φυσικά πάντα ισχύει η ΑΔΕ γιατί αυτή είναι η …. «αρχή μας» !!

Τις πταίει; (για το μπάχαλο αυτό;)

Ο σύζυγος της μάζας (σπεύδω να βοηθήσω : το μικρό του όνομα είναι Αλκίνοος). Για τους νεότερους συναδέλφους: ο Αλκίνοος Μάζης ήταν ο συγγραφέας των σχολικών βιβλίων φυσικής από το 1959 έως τη δεκαετία του ’90. Στη σελίδα 89 του σχετικού βιβλίου της Α’ Λυκείου (έκδοση ΚΒ 1982) αναφέρει την περιβόητη «αρχή της διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας». Οι παλαιότεροι από εμάς το μάθαμε έτσι από την «πηγή» ενώ οι νεότεροι «από στόμα σε στόμα».

- **Ας πάμε στο εύκολο Νο 6** το οποίο όχι μόνο δεν είναι αρχή αλλά και δεν ισχύει πάντα. π.χ. στις πυρηνικές αντιδράσεις που μπορεί να έχουμε εκπομπή ηλεκτρονίων , ποζιτρονίων ή σύλληψη ηλεκτρονίου δεν έχουμε διατήρηση του ατομικού αριθμού ,
- **ενώ βέβαια ισχύει πάντα η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου (Νο 5)**. Η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου είναι αρχή (και μάλιστα ένα από τα λίγα αναλλοίωτα μεγέθη ακόμη και σε σχετικιστικό επίπεδο).

- **Ας πάμε τώρα στο Νο 3 (διατήρηση ορμής)**

Όπως είναι γνωστό, σε ένα «μονωμένο» σύστημα σωμάτων δηλαδή σε ένα σύστημα στο οποίο δεν επενεργούν εξωτερικές δυνάμεις (ή γενικότερα $\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi}=0$)

τότε από τον $2^{ο}$ (τον γενικευμένο) και $3^{ο}$ νόμο του Νεύτωνα προκύπτει (δηλ. **αποδεικνύεται**) ότι : «η ολική ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή».
(Μία γρήγορη απόδειξη για την περίπτωση δύο σωμάτων δίνεται στο παράρτημα σελ. 7)

ΔΕΝ είναι λοιπόν αρχή, η διατήρηση της ορμής σε ένα μονωμένο σύστημα το οποίο υπακούει στους νόμους του Νεύτωνα.
Αντίθετα, φαίνεται (και εδώ είναι) θεώρημα.

Προσοχή ! «αρχή της διατήρησης της ορμής» υπάρχει αλλά όπως και στην ενέργεια, που όταν το σύστημα είναι συντηρητικό δεν έχουμε αρχή της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας παρά "σκέτο": «διατήρηση της μηχανικής ενέργειας» , έτσι και εδώ όταν το σύστημα είναι μονωμένο και υπακούει στους νόμους του Νεύτωνα τότε ισχύει "σκέτα" : «η διατήρηση της ορμής».

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε την άκρη του νήματος.

Υπάρχουν μονωμένα συστήματα στα οποία δεν ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα;

Και βέβαια υπάρχουν με πολλές πάμπολλες ποικιλίες. Από τις διάφορες ποικιλίες (σχετικιστικές, κβαντικές κ.α.) θα αναφερθούμε στις ηλεκτρομαγνητικές στις οποίες δεν ισχύει πάντα ο $3^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα . Αμέσως λοιπόν παύει να ισχύει «η διατήρηση της ορμής». Η μεταφορά όμως ορμής (από το ένα σώμα στο άλλο) όπως και κάθε πληροφορία δεν γίνεται ακαριαία αλλά μέσω ενός «μεσάζοντος πεδίου» (και εδώ … μίζες ;). Δηλαδή το πεδίο (εδώ το ηλεκτρομαγνητικό) μεταφέρει ορμή (και ενέργεια). Αν λοιπόν γενικεύσουμε την έννοια της ορμής μπορούμε να έχουμε διατήρηση της ορμής του συστήματος, περιλαμβάνοντας στην ορμή του συστήματος και την ορμή του πεδίου. Αντίστοιχη γενίκευση γίνεται και στους άλλους τομείς (στις ποικιλίες που λέγαμε) με αποτέλεσμα να καταλήγουμε σε μία διαπίστωση της «γενικότερης» διατήρησης της ορμής. Αν επιπλέον αναλογισθούμε ότι η ορμή του πεδίου (που δεν είναι άμεσα μετρήσιμη) υπολογίζεται μέσα σε κάποια όρια σφάλματος, τελικά «φαίνεται» να επαληθεύεται «η αρχή της διατήρησης της ορμής».

Έτσι, λοιπόν, όπως ακούγεται παράλογο να χρησιμοποιεί κανείς παράγωγο για να υπολογίσει την κλίση μιας ευθείας, έτσι φαίνεται παράλογο να επικαλούμαστε την «αρχή της διατήρησης της ορμής» για ένα μονωμένο σύστημα που υπακούει στους νόμους του Νεύτωνα.

Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για το Νο 4 .

Για το $2^{ο}$ Ερώτημα: Ποιο έχει μεγαλύτερη ισχύ; η «αρχή» ή ο «νόμος»
Οι νόμοι είναι … περιορισμένης ευθύνης (ΕΠΕ σα να λέμε), οι αρχές είναι …αρχές (οι στιγμιαίες παραβιάσεις θεωρούνται ως διακυμάνσεις του κενού).

Για το 3ο Ερώτημα: Ποιο είναι πιο εύκολο να εφαρμόζουμε σωστά;

Η απάντηση που μας βγαίνει είναι οι αρχές αλλά η αλήθεια είναι μάλλον το δεύτερο (ειδικά στις κρούσεις!).
Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο

Στην καρότσα ενός ημιφορτηγού που κινείται με σταθερή ταχύτητα βρίσκεται τροχός σε κατακόρυφο επίπεδο (σε ακλόνητη βάση πάνω στην καρότσα) που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Ο τροχός αρχικά δεν περιστρέφεται μέχρι που ένα κομμάτι πλαστελίνης (μικρής μάζας ~0.3 kg) που πέφτει κατακόρυφα από τον ουρανό (που βρέθηκε άραγε;) συγκρούεται πλαστικά με τον τροχό στο ανώτερο σημείο του τροχού (δηλ. πάνω στην κατακόρυφη που περνά από το κέντρο του τροχού. (Θεωρείστε ότι το ημιφορτηγό δεν μεταβάλλει την ταχύτητά του λόγω της … αύξησης της μάζας !!)

α)Πόση είναι η στροφορμή του συστήματος λίγο πριν την κρούση ως προς το κέντρο του τροχού;

β)Θα στραφεί ο δίσκος;

Η απάντηση είναι ναι.
Μα η διατήρηση της στροφορμής;
Εφαρμόστε τη διατήρηση της στροφορμής σε σύστημα αναφοράς που κινείται πάνω στην καρότσα. Δεν βγαίνει το ίδιο αποτέλεσμα! (η πλαστελίνη ως προς παρατηρητή πάνω στην καρότσα έχει δύο ταχύτητες μία την κατακόρυφη και μία οριζόντια αντίθετη εκείνης του ημιφορτηγού).

Συμπέρασμα: η εφαρμογή της διατήρησης της στροφορμής πρέπει να γίνεται με πολύ προσεκτικό τρόπο όταν ισχύει !!

Αντιθέτως, η εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα στο αρχικό σύστημα αναφοράς (με ωθήσεις και γωνιακές ωθήσεις) οδηγούν στο σωστό αποτέλεσμα (χωρίς να χρειάζεται ν' αλλάξουμε σύστημα αναφοράς).

Υπάρχουν επίσης προβλήματα κρούσης στα οποία η στροφορμή δεν διατηρείται με κανέναν τρόπο οπότε αναγκαστικά καταφεύγουμε στην εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα.

Παράδειγμα 2ο

Μπάλα μπιλιάρδου ακτίνας R, αρχικά ακίνητη πάνω στο τραπέζι του μπιλιάρδου, δέχεται στιγμιαία (άγνωστη) οριζόντια ώθηση από τη στέκα σε ύψος h πάνω από το κέντρο της. Αν αμέσως μετά την κρούση το κέντρο μάζας της μπάλας αποκτά ταχύτητα υ πόση είναι τότε η γωνιακή της ταχύτητα;

$I\omega - 0 = Fh\Delta t$
$m\upsilon - 0 = F\Delta t$

Από τη διαίρεση προκύπτει το ζητούμενο.

Συνοψίζοντας:

α) δεν πρέπει χρησιμοποιούμε τη λέξη αρχή στη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας
β) ομοίως στη διατήρηση ορμής και στροφορμής
γ) όπως φάνηκε από τα παραδείγματα, στις κρούσεις με στερεά σώματα, λύσεις δίνουν πάντα οι νόμοι του Νεύτωνα ενώ η διατήρηση της στροφορμής, αν εφαρμόζεται, θέλει μεγάλη προσοχή.

Περισσότερα, ίσως, για την εφαρμογή των νόμων του Νεύτωνα σε επόμενη ανάρτηση (αν το κρίνετε απαραίτητο).

Μετά από τόσες ΑΡΧΕΣ ας βάλουμε και ένα **ΤΕΛΟΣ**.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Έργο συντηρητικής δύναμης

Τι είναι ***συντηρητικό σύστημα***;
Είναι το σύστημα στο οποίο οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι μόνο οι συντηρητικές δυνάμεις,

Και τι είναι ***συντηρητικές δυνάμεις***;
Είναι τα διανυσματικά πεδία $\vec{F}(x,y,z)$ τα οποία είναι αστρόβιλα.

Και τι σημαίνει ***αστρόβιλα*** στα μαθηματικά;
Σημαίνει ότι το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ($2^{ου}$ είδους) σε οποιαδήποτε (κλειστή) καμπύλη είναι 0. Δηλαδή:
$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ για κάθε (κλειστή) καμπύλη c.

Αυτό στη Φυσική μεταφράζεται ως **«κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής το (συνολικό) έργο της συντηρητικής δύναμης είναι μηδέν».**

Τα αστρόβιλα πεδία έχουν δύο σημαντικές ιδιότητες:

α) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του αστρόβιλου πεδίου μεταξύ δύο σημείων είναι το ίδιο για οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει τα δύο αυτά σημεία.

Αυτό στη Φυσική μεταφράζεται ως **«το έργο της συντηρητικής δύναμης δεν εξαρτάται από τη διαδρομή παρά μόνο από την αρχική και τελική θέση».**

β) Κάθε αστρόβιλο πεδίο πηγάζει από μία βαθμωτή συνάρτηση Φ(x,y,z) δηλαδή για κάθε αστρόβιλο πεδίο $\vec{F}(x,y,z)$ υπάρχει μια βαθμωτή συνάρτηση Φ(x,y,z) τέτοια ώστε : $\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}\Phi(x,y,z)$ (η F είναι ίση με την κλίση της Φ). (Οι μαθηματικοί ονομάζουν την Φ «δυναμικό» , για μας δεν είναι έτσι ακριβώς όπως θα δούμε παρακάτω).
Στον ορισμό του Φ υπάρχει μια απροσδιοριστία προσθετικής σταθεράς με την έννοια ότι αν Φ η ζητούμενη συνάρτηση, τότε και η Φ+c είναι επίσης αποδεκτή.
Η επιλογή του c είναι δική μας υπόθεση και άνευ σημασίας.

Αν θέσουμε Φ(x,y,z) = - U(x,y,z) τότε μπορούμε να πούμε στη Φυσική ότι:
«κάθε συντηρητική δύναμη $\vec{F}$ μπορεί να γραφτεί ως $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$»
Για ευκολία ας το δούμε σε μία διάσταση όπου η παραπάνω σχέση γράφεται :
$$F = -\frac{dU}{dx}$$
και ας υπολογίσουμε τότε το έργο της $\vec{F}$:

$$W_{F\,(x_{\alpha\rho\chi}\rightarrow x_{\tau\varepsilon\lambda})} = \int_{x_{\alpha\rho\chi}}^{x_{\tau\varepsilon\lambda}} F dx = \int_{x_{\alpha\rho\chi}}^{x_{\tau\varepsilon\lambda}} -\frac{dU}{dx} dx = -\int_{x_{\alpha\rho\chi}}^{x_{\tau\varepsilon\lambda}} dU = U_{\alpha\rho\chi} - U_{\tau\varepsilon\lambda}$$

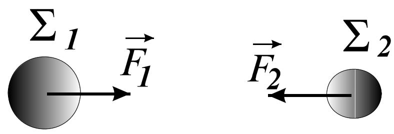
Αυτή η συνάρτηση U (της οποίας την ύπαρξη εξασφαλίζει η ιδιότητα της συντηρητικής δύναμης) είναι η γνωστή μας ***δυναμική ενέργεια***.
(Ουσιαστικά αποδείξαμε την πρώτη ιδιότητα των αστρόβιλων πεδίων).

Η σταθερά c καθορίζεται (αυθαίρετα) με την (αυθαίρετη) επιλογή του σημείου μηδενικής δυναμικής ενέργειας (ενεργειακή στάθμη αναφοράς).

Β. Διατήρηση ορμής σε μονωμένο σύστημα δύο σωμάτων

(που ικανοποιούν τους νόμους του Νεύτωνα)

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα σύστημα δύο σωμάτων στο οποίο δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις.



Αν $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι οι εσωτερικές δυνάμεις τότε σύμφωνα με τον **3ο νόμο του Νεύτωνα**:
α) οι δυνάμεις αυτές βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία και
β) $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (1)

Ας εφαρμόσουμε τώρα σε κάθε σώμα το **2ο νόμο του Νεύτωνα** στη γενικότερη διατύπωση : $\Sigma \vec{F} = \dfrac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$

Για το σώμα Σ_1 : $\vec{F}_1 = \dfrac{\Delta \vec{p}_1}{\Delta t}$ (2)

Για το σώμα Σ_2 : $\vec{F}_2 = \dfrac{\Delta \vec{p}_2}{\Delta t}$ (3)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (3) και με βάση την (1) έχουμε:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 = \frac{\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\Delta t}$$

επομένως $\vec{p}_{o\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} = \vec{p}_{o\lambda(\alpha\rho\chi)}$