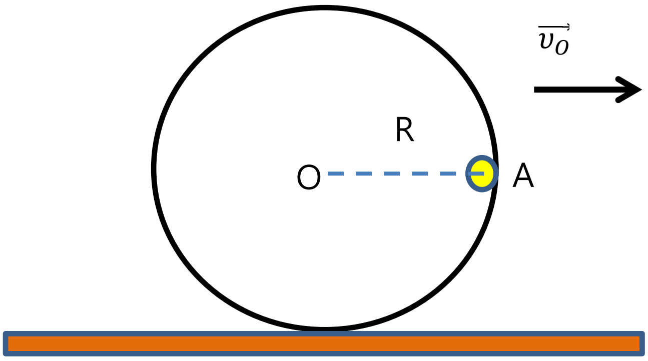
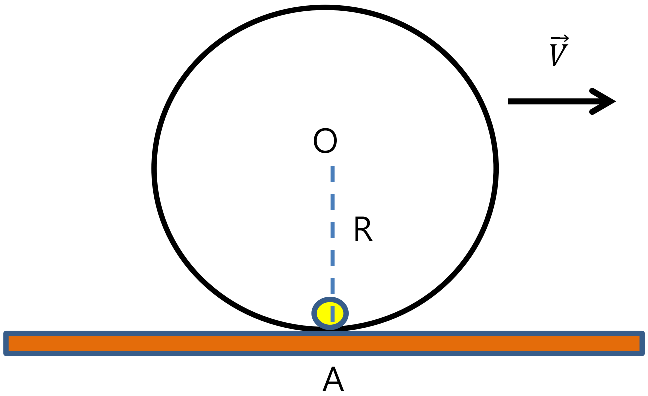
Η ταχύτητα του κέντρου μάζας

Έστω δακτύλιος ακτίνας R και μάζας m, σε κάποιο σημείο A εσωτερικά της περιφέρειας του οποίου, έχει προσδεθεί σημειακή μάζα m. Το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Την χρονική στιγμή t=0 που η ακτίνα OA είναι οριζόντια, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δακτυλίου είναι υ_o . Όταν η ακτίνα OA γίνει για πρώτη φορά κατακόρυφη η ταχύτητα του κέντρου μάζας v θα είναι:

α) $V = \sqrt{2\upsilon_0^2 + gR}$ β) $V = \sqrt{\upsilon_0^2 - gR}$ γ) $V = \sqrt{\upsilon_0^2 + \frac{gR}{2}}$



(σχήμα 1)



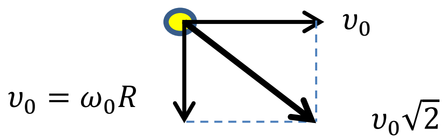
(σχήμα 2)

Απάντηση

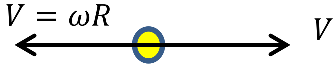
Υπολογίζουμε την ροπή αδράνειας του δακτυλίου μάζας m ως προς το κέντρο μάζας του κατά τα γνωστά και έχουμε:

$$\mathrm{I}_{CM(\delta)} = mR^2$$

Στην αρχική θέση η ταχύτητα της σημειακής μάζας είναι $\upsilon_0\sqrt{2}$



και στην τελική θέση είναι μηδέν αφού εκτελώντας κύλιση χωρίς ολίσθηση στο κατώτερο σημείο θα έχουμε $V - \omega R = 0$



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της τελικής θέσης θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το κατώτερο σημείο στην τελική θέση της σημειακής μάζας m και έχουμε:

$$K_{\delta(\alpha\varrho\chi)} + K_{m(\alpha\varrho\chi)} + U_{\delta(\alpha\varrho\chi)} + U_{m(\alpha\varrho\chi)} = K_{\delta(\tau\varepsilon\lambda)} + K_{m(\tau\varepsilon\lambda)} + U_{\delta(\tau\varepsilon\lambda)} + U_{m(\tau\varepsilon\lambda)\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{\upsilon_0^2}{R^2} + \frac{1}{2}m2\upsilon_0^2 + mgR + mgR = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mR^2\frac{V^2}{R^2} + mgR \ (1)$$

Έτσι από την 1 έχουμε:

$$\upsilon_0^2 + \upsilon_0^2 + 2\upsilon_0^2 + 2gR = V^2 + V^2 \Rightarrow V^2 = 2\upsilon_0^2 + gR \Rightarrow V = \sqrt{2\upsilon_0^2 + gR}$$

Άρα σωστό το (α)

Α. Αθανασιάδης