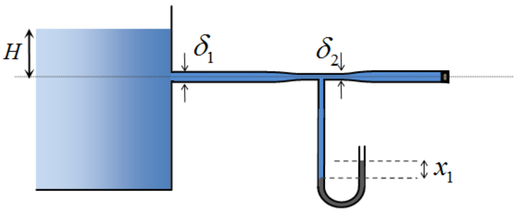
Άσκηση στα ρευστά με πειραματική συνοδεία

Σε δεξαμενή που περιέχει νερό έχουμε προσαρμόσει οριζόντιο σωλήνα σε κατακόρυφη απόσταση H από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Ο σωλήνας έχει διάμετρο εγκάρσιας διατομής δ_1 και παρουσιάζει στένωση διαμέτρου δ_2.

Στο μέσο της στενής περιοχής του σωλήνα έχουμε προσαρμόσει κατακόρυφο σωληνάκι στο οποίο έχουμε προσαρμόσει μανόμετρο τύπου **U** που περιέχει υδράργυρο.



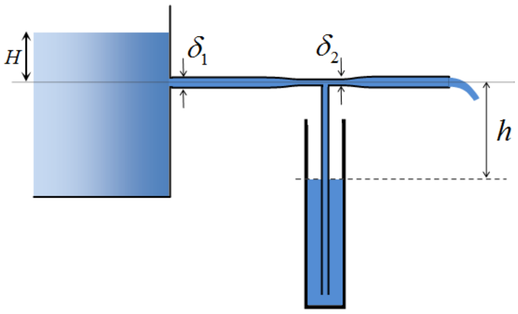
Σχήμα 1

Έχοντας κλειστό το άκρο του σωλήνα (δεν υπάρχει ροή) η υψομετρική διαφορά στο μανόμετρο είναι x_1.

Με ανοιχτό το άκρο του σωλήνα η αντίστοιχη διαφορά είναι x_2.

Α. Αποδείξτε ότι διαφορά $x_1 - x_2$ είναι ανεξάρτητη από την κατακόρυφη απόσταση του μανομέτρου από το σωλήνα.

Αφαιρούμε το μανόμετρο και τοποθετούμε κυλινδρικό δοχείο μέσα στο οποίο καταλήγει το κατακόρυφο σωληνάκι όπως φαίνεται στο σχήμα 2. Με αρχικά κλειστό το άκρο του σωλήνα το κυλινδρικό δοχείο αρχίζει να γεμίζει με νερό. Στη συνέχεια ανοίγουμε το άκρο του σωλήνα.



Σχήμα 2

Β. Σε ποια κατακόρυφη απόσταση h από τον οριζόντιο σωλήνα, θα σταθεροποιηθεί η στάθμη του νερού στο κυλινδρικό δοχείο;

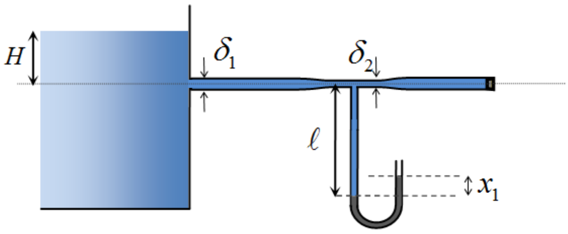
Εφαρμογή για: $H = 1m$, $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \sqrt[4]{2,62}$, πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3 \frac{Kg}{m^3}$, πυκνότητα υδραργύρου $\rho_{Hg} = 13,6 \cdot 10^3 \frac{Kg}{m^3}$

<u>*Παραδοχές.*</u>

- *Το ιξώδες του νερού θεωρείται αμελητέο.*
- *Η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή παραμένει στο ίδιο ύψος σε κάθε περίπτωση.*
- *Θεωρούμε ότι μετά το άνοιγμα του άκρου του οριζόντιου σωλήνα το σύστημα φτάνει σε ισορροπία κατά την οποία η ροή είναι μόνιμη.*

Λύση:

Α. Με το άκρο του οριζόντιου σωλήνα κλειστό το υγρό ισορροπεί. Άρα,



$$P_{atm} + \rho g\left(H + \ell\right) = P_{atm} + \rho_{Hg} g x_1$$

ή

$$\boxed{H + \ell = \frac{\rho_{Hg}}{\rho} x_1} \qquad \textbf{(1)}$$

όπου ℓ το ύψος της στήλης νερού στο κατακόρυφο σωληνάκι.

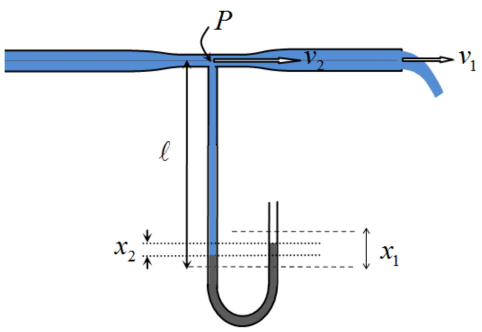
Μετά το άνοιγμα του άκρου του σωλήνα και την αποκατάσταση μόνιμης ροής, γράφοντας την εξίσωση Bernoulli για την ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής και το άκρο του σωλήνα έχουμε,

$$P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

ή

$$\boxed{v_1^2 = 2gH} \qquad \textbf{(2)}$$

Αν v_2 και P η ταχύτητα του νερού και η στατική πίεση αντίστοιχα, στο στενότερο τμήμα του σωλήνα, τότε από την εξίσωση συνέχειας προκύπτει,



$$\frac{\pi\delta_1^2}{4} v_1 = \frac{\pi\delta_2^2}{4} v_2$$

ή

$$\boxed{\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^2} \qquad \textbf{(3)}$$

και από την εξίσωση Bernoulli,

$$P + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

ή λαμβάνοντας υπόψη τις (2) και (3),

$$\boxed{P = P_{atm} - \rho g H\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^4 - 1\right)} \qquad (4)$$

Από την νέα ισορροπία του υδραργύρου στο μανόμετρο έχουμε,

$$P+\rho g\left(\ell-\frac{x_1-x_2}{2}\right)=P_{atm}+\rho_{Hg}gx_2$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (4) με την τελευταία εξίσωση προκύπτει μετά τις πράξεις,

$$\boxed{x_1-x_2=\frac{H\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^4}{\dfrac{\rho_{Hg}}{\rho}-\dfrac{1}{2}}} \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές: $x_1-x_2=0,2m$

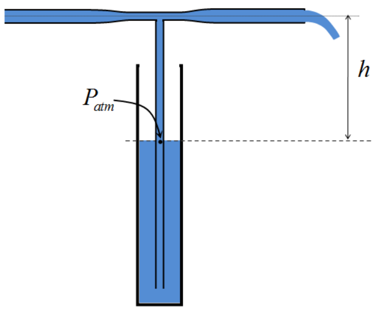
Β. Από την ισορροπία της κατακόρυφης στήλης νερού ύψους h, προκύπτει,

$$P+\rho gh=P_{atm}$$

Αντικαθιστώντας την πίεση P από την εξίσωση (4) έχουμε,

$$\boxed{h=H\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^4-1\right)} \qquad (6)$$

Διαφορετικά: Η ισορροπία της στάθμης του νερού στο δοχείο ισοδυναμεί με την περίπτωση $x_2=0$ του ερωτήματος Α, αφού η πίεση στο επίπεδο της ελεύθερης επιφάνειας του νερού μέσα στο σωληνάκι θα είναι ίση με την ατμοσφαιρική.



Άρα, $x_1=\dfrac{H\left(\dfrac{\delta_1}{\delta_2}\right)^4}{\dfrac{\rho_{Hg}}{\rho}-\dfrac{1}{2}}$ και $h=\ell-\dfrac{x_1}{2}$

Λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση (1) μετά από μερικές πράξεις βρίσκουμε,

$$\boxed{h=H\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^4-1\right)}$$

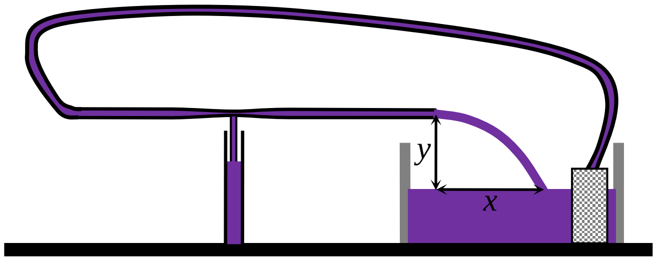
Αντικαθιστώντας: $h=1,62m$

Πειραματική μελέτη

Στον σύνδεσμο https://youtu.be/sDlpx3P921s μπορείτε να δείτε πειραματική διάταξη που αφορά στο Β ερώτημα της άσκησης και επιβεβαιώνει ποιοτικά τη λύση.

Το ρόλο της δεξαμενής η οποία δημιουργεί μια σταθερή παροχή στον οριζόντιο σωλήνα, παίζει μια αντλία η οποία εξασφαλίζει την επιθυμητή τιμή της παροχής μεταβάλλοντας κατάλληλα την τάση τροφοδοσίας της.

Η ταχύτητα ροής μπορεί να μετρηθεί με ικανοποιητική ακρίβεια μετρώντας το ύψος y του ανοιχτού άκρου του σωλήνα από την επιφάνεια του νερού στη γυάλινη λεκάνη και το βεληνεκές x της φλέβας όπως φαίνεται στο σχήμα. Προκύπτει, $v_1 = \sqrt{\dfrac{gx^2}{2y}}$.



Το ισοδύναμο ύψος H σύμφωνα με την (2) θα είναι, $H = \dfrac{x^2}{4y}$ και η εξίσωση (6) γίνεται,

$$h = \frac{x^2}{4y}\left(\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^4 - 1\right)$$

Οι τιμές των μεγεθών ήταν: $x \simeq 17cm$, $y \simeq 16cm$, $\delta_1 \simeq 11mm$ και $\delta_2 \simeq 7,5mm$.

Από τα παραπάνω υπολογίζουμε $h \simeq 16cm$ ενώ η τιμή που μετρήθηκε ήταν $13cm$ ικανοποιητικά κοντά αν λάβουμε υπόψη ότι η πίεση στην περιοχή της στένωσης θα είναι λίγο μεγαλύτερη από τη θεωρητικά υπολογιζόμενη λόγω του ιξώδους.

schortis@otenet.gr