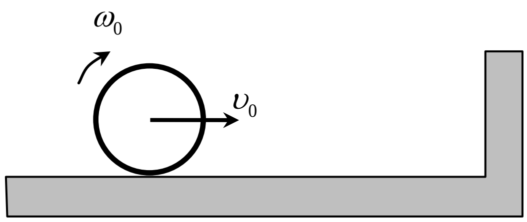
Άπειρες κρούσεις

Δακτύλιος ακτίνας R κυλάει σε οριζόντιο δάπεδο προς ένα κατακόρυφο τοίχο όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του δακτυλίου με το δάπεδο είναι μ, ενώ ο τοίχος είναι λείος. Η κρούση του δακτυλίου με τον τοίχο είναι ανελαστική και έχει ως αποτέλεσμα την ελάττωση της κινητικής του ενέργειας λόγω μεταφορικής κίνησης κατά $\frac{800}{9}\%$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, ο δακτύλιος συγκρούεται με τον τοίχο με ταχύτητα (κέντρου μάζας) μέτρου υ_0.



Α. Δείξτε ότι ο δακτύλιος θα συγκρουστεί (θεωρητικά) άπειρες φορές με τον τοίχο, και θα σταματήσει σε πεπερασμένο χρόνο, ακριβώς μπροστά από αυτόν.

Β. Βρείτε το συνολικό χρόνο κίνησης του δακτυλίου.

Γ. Υπολογίστε το συνολικό διάστημα που διανύει το κέντρο μάζας του δακτυλίου.

Δ. Βρείτε το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του δακτυλίου που μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω των ανελαστικών συγκρούσεων με τον τοίχο.

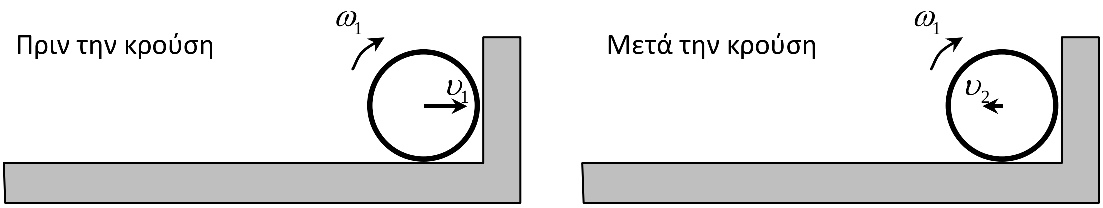
Λύση.

Έστω υ_1 και υ_2 τα μέτρα των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση του δακτυλίου με τον τοίχο. Η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης είναι αντίστοιχα, $K_1 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2$, $K_2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2$. Από το δεδομένο ποσοστό μείωσης της κινητικής ενέργειας έχουμε,

$$K_2 = \frac{1}{9}K_1 \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \frac{1}{3}\upsilon_1}$$

Αφού ο τοίχος είναι λείος, η δύναμη που ασκεί στον δακτύλιο κατά την διάρκεια της κρούσης είναι οριζόντια και επομένως ουδεμία μεταβολή προκαλεί στην γωνιακή ταχύτητα του δακτυλίου. Αν υποθέσουμε ότι ο δακτύλιος κυλάει, αμέσως πριν κρούση θα είναι,

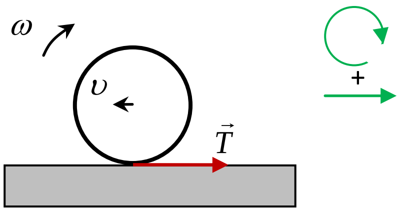
$$\omega_1 = \frac{\upsilon_1}{R}$$



Μετά την κρούση ασκείται στον δακτύλιο δύναμη τριβής μέτρου, $T = \mu mg$. Έτσι η μεταφορική και η περιστροφική κίνηση του δακτυλίου είναι ομαλά μεταβαλλόμενες με επιταχύνσεις μέτρων,

$$a_{cm} = \frac{T}{m} \Rightarrow \boxed{a_{cm} = \mu g} \quad \text{και}$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{TR}{mR^2} \Rightarrow \boxed{a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\mu g}{R}}$$



Η ταχύτητα του κέντρου μάζας και η γωνιακή ταχύτητα, μετά από χρόνο Δt από τη στιγμή της κρούσης δίνονται από τις σχέσεις,

$$\upsilon = -\upsilon_2 + a_{cm}\Delta t \Rightarrow \boxed{\upsilon = -\frac{1}{3}\upsilon_1 + \mu g \Delta t} \quad (1)$$

$$\omega = \omega_1 - a_{\gamma\omega\nu}\Delta t \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\upsilon_1}{R} - \frac{\mu g}{R}\Delta t} \quad (2)$$

Η ολίσθηση του δακτυλίου θα σταματήσει όταν ικανοποιηθεί η συνθήκη, $\upsilon = \omega R$, και με αντικατάσταση από τις παραπάνω εξισώσεις βρίσκουμε, $\Delta t = \dfrac{2\upsilon_2}{\mu g}$. Αντικαθιστώντας στις (1) και (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\upsilon_1 = 3\upsilon_2$, έχουμε,

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_2} \ , \ \boxed{\omega = \omega_2 = \frac{\upsilon_2}{R}}$$

Η μετατόπιση του κέντρου μάζας στο διάστημα Δt θα είναι,

$$\Delta x = -\upsilon_2 \Delta t + \frac{1}{2} a_{cm} \left(\Delta t\right)^2 \Rightarrow \boxed{\Delta x = 0}$$

Δηλαδή η ταχύτητα του κέντρου μάζας τη στιγμή που σταματά η ολίσθηση, είναι αντίθετη της ταχύτητας αμέσως μετά την κρούση, ο δακτύλιος βρίσκεται ακριβώς μπροστά από τον τοίχο, αμέσως ακολουθεί νέα κρούση με ταχύτητες υ_2 και $\omega_2 = \dfrac{\upsilon_2}{R}$ <u>και το φαινόμενο επαναλαμβάνεται</u>.

Β,Γ,Δ.

Έστω $\upsilon_n \ \left(n = 1, 2, 3....\right)$ το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας **αμέσως μετά** την $n - \text{οστή}$ κρούση. Όπως είναι φανερό από τα προηγούμενα θα ισχύουν οι σχέσεις,

- $\upsilon_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \upsilon_0$
- $\Delta t_n = \dfrac{2\upsilon_n}{\mu g}$ (χρονικό διάστημα από την n έως την $n+1$ κρούση)
- $S_n = \dfrac{\upsilon_n^2}{\mu g}$ (διάστημα που διανύει το κέντρο μάζας μεταξύ των κρούσεων)
- $\left|\Delta K_n\right| = 4m\upsilon_n^2$ (απώλεια ενέργειας κατά τη $n - \text{οστή}$ κρούση)

- Ο συνολικός χρόνος κίνησης του δακτυλίου θα είναι,

$$t_{\text{ολ}} = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta t_n \Rightarrow t_{\text{ολ}} = \frac{2\upsilon_0}{\mu g} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Όμως το άθροισμα στην τελευταία σχέση είναι το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $\dfrac{1}{3}$ και λόγο $\dfrac{1}{3}$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

και το αποτέλεσμα είναι,

$$\boxed{t_{\text{ολ}}=\frac{\upsilon_0}{\mu g}}$$

<u>Διαφορετικά</u>

Σε όλη τη διάρκεια του φαινομένου η στροφική κίνηση του δακτυλίου είναι ομαλά επιβραδυνόμενη (αφού η τριβή δεν μηδενίζεται σε κανένα χρονικό διάστημα) με επιβράδυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu}=\frac{\mu g}{R}$ *. Άρα,*

$$\omega=\omega_0-\frac{\mu g}{R}t$$

Όταν ο δακτύλιος σταματήσει θα είναι $\omega=0$*, οπότε αντικαθιστώντας στην τελευταία εξίσωση βρίσκουμε,*

$$t_{\text{ολ}}=\frac{\omega_0 R}{\mu g}\ \text{ή}\ t_{\text{ολ}}=\frac{\upsilon_0}{\mu g}$$

- Για το συνολικό διανυόμενο διάστημα έχουμε,

$$S_{\text{ολ}}=\sum_{n=1}^{\infty}S_n\Rightarrow S_{\text{ολ}}=\frac{\upsilon_0^2}{\mu g}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\Rightarrow\boxed{S_{\text{ολ}}=\frac{\upsilon_0^2}{8\mu g}}$$

- Η συνολική απώλεια ενέργειας **<u>εξαιτίας των κρούσεων</u>** θα είναι,

$$\left|\Delta K_{o\lambda}\right|=4m\upsilon_0^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\Rightarrow\left|\Delta K_{o\lambda}\right|=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

Όμως η αρχική κινητική ενέργεια του δακτυλίου είναι,

$$K_0=\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+\frac{1}{2}I\omega_0^2\Rightarrow K_0=m\upsilon_0^2$$

Άρα λόγω των κρούσεων μετατρέπεται σε θερμότητα το 50% της κινητικής ενέργειας του δακτυλίου. Το υπόλοιπο 50% μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω της τριβής με το οριζόντιο δάπεδο.

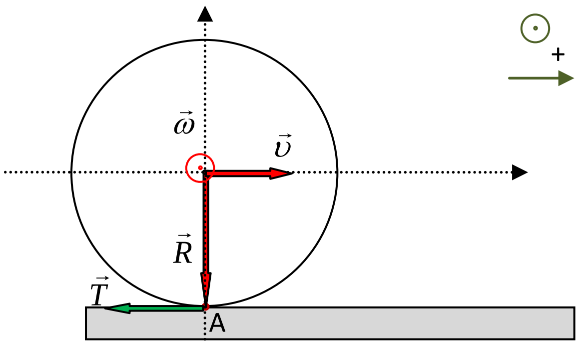
Σχόλιο: Η κινητική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμότητα λόγω τριβής με το δάπεδο θα είναι,

$$\left|\Delta K_{\tau\rho}\right| = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

Υπολογίζοντας το γινόμενο, $TS_{o\lambda} = \mu mgS_{o\lambda} = \frac{1}{8} m\upsilon_0^2$, βρίσκουμε ότι **δεν ταυτίζεται** με την απώλεια της κινητικής ενέργειας λόγω τριβής, όπως ίσως θα περιμέναμε.

Ας το δούμε λίγο πιο προσεκτικά.

Έστω κυλινδρικής συμμετρίας σώμα που κινείται σε οριζόντιο δάπεδο με το οποίο παρουσιάζει σταθερή τριβή. Ασκούνται επίσης η δύναμη του βάρους και η κάθετη δύναμη στήριξης οι οποίες έχουν συνισταμένη μηδέν και μηδενική ροπή και επομένως δεν επηρεάζουν την κίνηση του στερεού. Η κινητική ενέργεια του στερεού θα είναι,



$$K = \frac{1}{2} m\upsilon^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι,

$$\frac{dK}{dt} = m\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}_{cm} + I\vec{\omega}\cdot\vec{a}_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{T} + \vec{\omega}\cdot\vec{\tau} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{T} + \vec{\omega}\cdot\left(\vec{R}\times\vec{T}\right)$$

όπου $\vec{R}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της τριβής το οποίο είναι το σημείο επαφής του στερεού με το έδαφος (σημείο Α στο σχήμα).

Από την ταυτότητα της διανυσματικής ανάλυσης, $\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{C}$ η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$\frac{dK}{dt} = \vec{\upsilon}\cdot\vec{T} + \left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\cdot\vec{T} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \vec{T}\cdot\left[\vec{\upsilon} + \left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right)\right]$$

ή

$$\frac{dK}{dt} = \vec{T}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}$$

αφού $\vec{\upsilon} + \left(\vec{\omega}\times\vec{R}\right) = \vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}$

Αν T το μέτρο της τριβής ολίσθησης το διάνυσμα της τριβής γράφεται,

$$\vec{T} = -T\,\frac{\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}}{\left|\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}\right|}$$

αφού η κατεύθυνση του διανύσματος είναι αντίθετη από την κατεύθυνση της ταχύτητας του σημείου Α.

Έτσι τελικά προκύπτει,

$$\frac{dK}{dt} = -T\,\frac{\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}}{\left|\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}\right|}\cdot\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}} \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = -T\left|\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}\right|}$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία βρίσκουμε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την κίνηση του στερεού για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\Delta K = -T\int_{t_1}^{t_2}\left|\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}\right| dt$$

ή

$$\boxed{\Delta K = -TS_{\mathrm{A}}}$$

όπου S_{A} το διάστημα που διανύει ένα σημείο, η ταχύτητα του οποίου είναι κάθε στιγμή ίση με την ταχύτητα του σημείου επαφής (Α) του στερεού με το δάπεδο.

Στην περίπτωση της παραπάνω άσκησης η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σημείου επαφής του δακτυλίου με το δάπεδο είναι,

$$\upsilon_{\mathrm{A}} = \upsilon - \omega R$$

όπου υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του κέντρου μάζας του δακτυλίου.

Αλλά σε όλη τη διάρκεια της κίνησης, $\upsilon_{\mathrm{A}} \le 0$, οπότε, $\left|\upsilon_{\mathrm{A}}\right| = \omega R - \upsilon$ και

$$S_{\mathrm{A}} = \int_0^{t_{o\lambda}}\left|\vec{\upsilon}_{\mathrm{A}}\right| dt \Rightarrow S_{\mathrm{A}} = \int_0^{t_{o\lambda}}\left(\omega R - \upsilon\right) dt \Rightarrow S_{\mathrm{A}} = R\int_0^{t_{o\lambda}}\omega dt - \cancel{\int_0^{t_{o\lambda}}\upsilon dt} \Rightarrow \boxed{S_{\mathrm{A}} = R\theta_{o\lambda}}$$

με $\theta_{o\lambda} = \dfrac{\omega_0^2}{2a_{\gamma\omega\nu}} = \dfrac{\omega_0^2 R}{2\mu g}$

Άρα

$$\Delta K_{\tau\rho} = -TS_{\mathrm{A}} \Rightarrow \Delta K_{\tau\rho} = -\mu mg\,\frac{\omega_0^2 R^2}{2\mu g} \Rightarrow \Delta K_{\tau\rho} = -\frac{m\omega_0^2 R^2}{2}$$

και τελικά,

$$\left|\Delta K_{\tau\rho}\right| = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2$$

όπως ήταν αναμενόμενο.

Σπύρος Χόρτης

schortis@otenet.gr