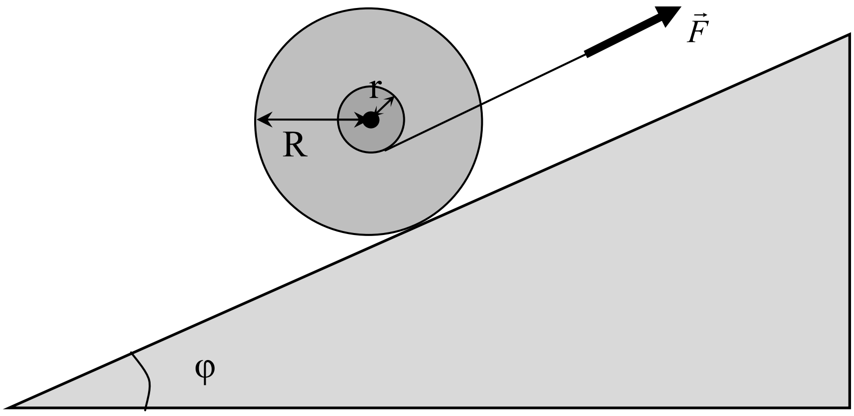
Κύλιση και στατική τριβή

Το στερεό του σχήματος μάζας m = 4 Kg αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες R = 0,5 m και r = 0,1 m. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας r είναι τυλιγμένο αβαρές και μη εκτατό νήμα. Στο άκρο του νήματος ασκείται δύναμη $\vec{F}$ με διεύθυνση παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και φορά προς τα πάνω όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το στερεό μπορεί να κινείται σε κεκλιμένο επίπεδο το οποίο σχηματίζει γωνία φ = 30° με την οριζόντια διεύθυνση.



Α. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ και την ελάχιστη τιμή (μ_1) του συντελεστή στατικής τριβής ώστε το στερεό να ισορροπεί.

Β. Υπολογίστε το μέτρο της $\vec{F}$ ώστε στο στερεό να μην ασκείται τριβή. Ποια είναι τότε η επιτάχυνση του κέντρου μάζας;

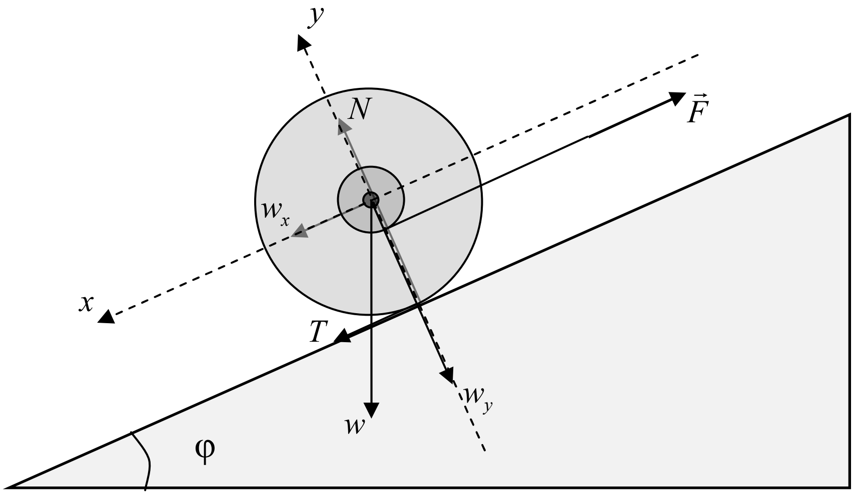
Γ. Αν ο συντελεστής τριβής έχει την τιμή $\mu = 1,2\mu_1$ υπολογίστε τις δυνατές τιμές του μέτρου της $\vec{F}$ ώστε το στερεό να μην ολισθαίνει.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του στερεού ως προς άξονα του: I =0,5kgm^2 και η επιτάχυνση της βαρύτητας: g = 10 m/s^2.

<u>Λύση</u>

Α. Για να ισορροπεί το σώμα πρέπει να ισχύουν,

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad \sum \tau = 0$$



Αντικαθιστώντας έχουμε,

$$mg\eta\mu\varphi + T - F = 0 \tag{1}$$

$$N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \boxed{N = 20\sqrt{3}N}$$

και

$$mgR\eta\mu\varphi - F\left(R - r\right) = 0 \tag{2}$$

(Οι ροπές των δυνάμεων υπολογίστηκαν ως προς το σημείο επαφής του στερεού με το κεκλιμένο επίπεδο)

Από την (2) βρίσκουμε,

$$F = \frac{mgR\eta\mu\varphi}{R - r}$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές στο S.I.,

$$\boxed{F = 25N}$$

Από την (1) υπολογίζουμε την στατική τριβή,

$$\boxed{T = 5N}$$

Αλλά,

$$T \le \mu N \Rightarrow \mu \ge \frac{T}{N} \Rightarrow \mu \ge \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Άρα η ζητούμενη ελάχιστη τιμή του συντελεστή τριβής είναι,

$$\boxed{\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{12}}$$

Β. Για την κίνηση του στερεού από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε,

$$\sum F_x = ma_{cm}$$

ή

$$mg\eta\mu\varphi + T - F = ma_{cm} \qquad (3)$$

και από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης,

$$\sum \tau_{(cm)} = Ia_{\gamma\omega\nu}$$

ή

$$Fr - TR = Ia_{\gamma\omega\nu} \qquad (4)$$

Επίσης,

$$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R \qquad (5)$$

εφόσον στο σώμα κυλάει χωρίς να ολισθαίνει.

Από το σύστημα των (3), (4) και (5), βρίσκουμε,

$$T = \frac{F\left(I + mrR\right) - Img\eta\mu\varphi}{I + mR^2} \qquad (6)$$

και

$$a_{cm} = \frac{mR^2 g\eta\mu\varphi - F\left(R^2 - rR\right)}{I + mR^2} \qquad (7)$$

Για $T = 0$ η (6) δίνει,

$$F = \frac{Img\eta\mu\varphi}{\left(I + mrR\right)}$$

και αντικαθιστώντας

$$\boxed{F = \frac{100}{7}N}$$

Αντικαθιστώντας στην (7),

$$\boxed{a_{cm} = \frac{10}{7}\frac{m}{s^2}}$$

Γ. Το σώμα δεν ολισθαίνει εφόσον για το μέτρο της απαιτούμενης στατικής τριβής ισχύει,

$$\left|T\right| \le \mu N$$

με, $\mu = 1,2\mu_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{10}$.

Αντικαθιστώντας από την (6) έχουμε,

$$\left|\frac{F\left(I+mrR\right)-Imgημφ}{I+mR^2}\right| \le \mu N$$

ή μετά από τις πράξεις,

$$\boxed{\frac{10}{7}N \le F \le \frac{190}{7}N}$$

Σπύρος Χόρτης

schortis@otenet.gr