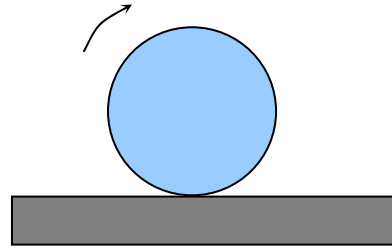


## Κύλιση δίσκου και ο στιγμιαίος άξονας περιστροφής

Δίσκος ακτίνας  $R$  κυλάει χωρίς να ολισθαίνει σε επίπεδη επιφάνεια. Ποια σημεία του δίσκου έχουν ταχύτητα μέτρου,

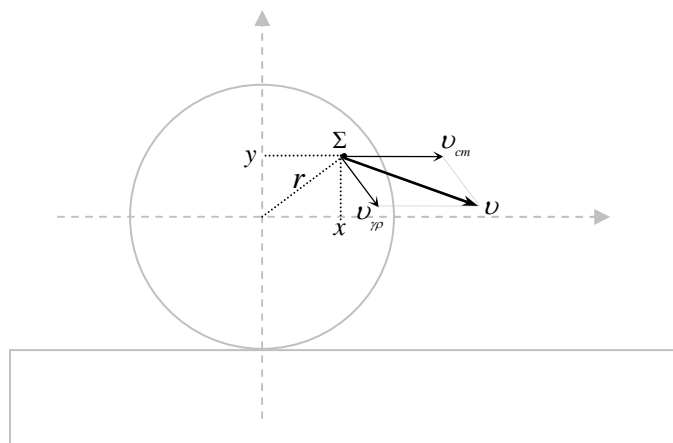
- i) ίση με  $u_{cm}$
- ii) μικρότερη από  $u_{cm}$
- iii) μεγαλύτερη από  $u_{cm}$



## Απάντηση

### **1<sup>ος</sup> τρόπος**

Έστω σημείο  $\Sigma$  του δίσκου με συντεταγμένες  $(x, y)$  στο σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο του. Θεωρώντας την κίνηση του δίσκου ως επαλληλία μεταφορικής και στροφικής κίνησης για το μέτρο της ταχύτητας του  $\Sigma$  θα έχουμε,



$$v^2 = v_{cm}^2 + v_{\gamma\rho}^2 + 2v_{cm}v_{\gamma\rho} \frac{y}{r}$$

ή

$$v^2 = v_{cm}^2 + \frac{v_{cm}^2}{R^2} (x^2 + y^2) + 2 \frac{v_{cm}^2}{R} y$$

ή μετά από μερικές πράξεις,

$$x^2 + (y + R)^2 = \left( \frac{v}{v_{cm}} R \right)^2 \quad (1)$$

i) Για  $v = v_{cm}$  η (1) γίνεται,

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2 \quad (2)$$

που είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο  $(0, -R)$  (δηλαδή το σημείο επαφής του δίσκου με το επίπεδο) και ακτίνας  $R$ . Επομένως τα ζητούμενα σημεία είναι τα σημεία του δίσκου που ανήκουν στον παραπάνω κύκλο.

ii) Για  $v < v_{cm}$  η (1) γίνεται,

$$x^2 + (y + R)^2 < R^2$$

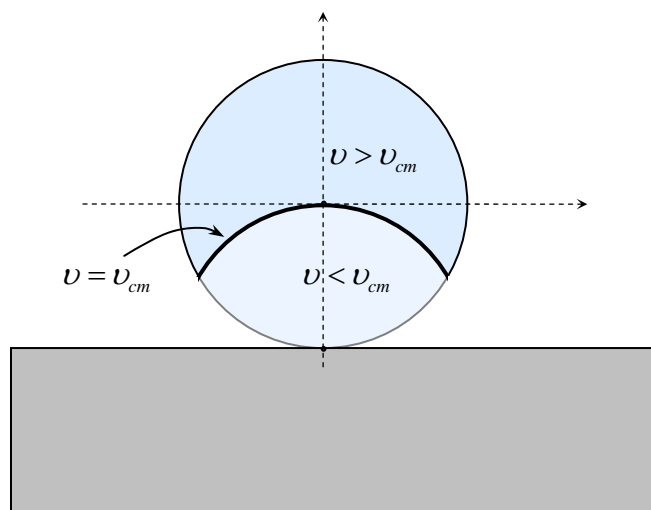
Τα σημεία που ικανοποιούν την τελευταία σχέση είναι τα σημεία στο εσωτερικό του κύκλου της εξίσωσης (2).

iii) Για  $v > v_{cm}$ ,

$$x^2 + (y + R)^2 > R^2$$

και πρόκειται για τα σημεία εκτός του κύκλου της εξίσωσης (2)

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



### **2<sup>ος</sup> τρόπος (και η αξία του στιγμιαίου άξονα περιστροφής)**

Θεωρώντας ότι η κίνηση του δίσκου είναι στροφική κίνηση γύρω από τον στιγμιαίο άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής του με την επίπεδη επιφάνεια και είναι κάθετος στο επίπεδό του, κάθε σημείο έχει ταχύτητα μέτρου,

$$v = \omega r$$

όπου  $r$  η απόσταση του σημείου από τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής. Προφανώς για το κέντρο μάζας είναι,

$$v_{cm} = \omega R$$

Άρα,

$$(i) v = v_{cm} \Rightarrow r = R, \quad (ii) v < v_{cm} \Rightarrow r < R, \quad (iii) v > v_{cm} \Rightarrow r > R$$

---

Σπύρος Χόρτης

[schortis@otenet.gr](mailto:schortis@otenet.gr)