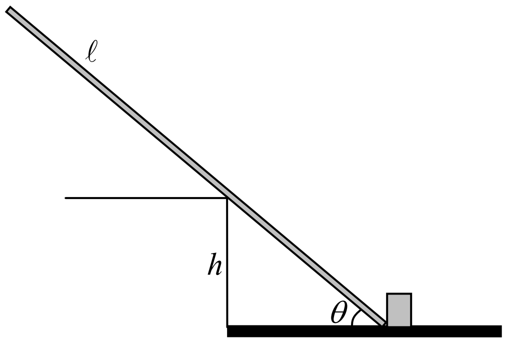
Ράβδος σε σκαλοπάτι

Ράβδος μήκους ℓ ακουμπά σε σκαλοπάτι ύψους h όπως φαίνεται στο σχήμα. Το κάτω άκρο της είναι σε επαφή με λείο κατακόρυφο εμπόδιο το οποίο μπορεί να κρατείται σταθερό σε οποιαδήποτε θέση. Μεταξύ ράβδου – σκαλοπατιού και ράβδου - εδάφους δεν υπάρχει τριβή.



A. Για ποιες τιμές του λόγου $\frac{h}{\ell}$ η ράβδος ισορροπεί, για οποιαδήποτε γωνία θ ;

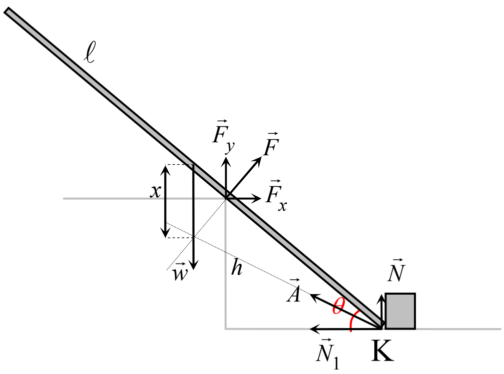
B*. Αν μεταξύ ράβδου – εδάφους ο συντελεστής οριακής τριβής είναι μ και δεν υπάρχει το σταθερό εμπόδιο, για ποιες τιμές της γωνίας θ η ράβδος ισορροπεί;

<u>**Λύση:**</u>

Α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο είναι, το βάρος $\vec{w}$, η δύναμη $\vec{F}$ από το σκαλοπάτι, η δύναμη $\vec{N}$ από το έδαφος και η δύναμη $\vec{N}_1$ από το λείο εμπόδιο, όπως φαίνονται στο σχήμα. Αναλύοντας την $\vec{F}$ σε κατακόρυφη και οριζόντια συνιστώσα έχουμε,

$$F_x = F\eta\mu\theta \text{ και } F_y = F\sigma\upsilon\nu\theta$$

Η συνθήκη ισορροπίας της ράβδου επιβάλει,



$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F\eta\mu\theta = N_1 \qquad (1)$$

και

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F\sigma\upsilon\nu\theta + N = w \qquad (2)$$

Επίσης,

$$\sum \tau_{(K)} = 0 \Rightarrow w\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta - F\frac{h}{\eta\mu\theta} = 0 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) βρίσκουμε,

$$N = w\left(1 - \frac{\ell}{2h}\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)$$

Για να μην ανατρέπεται η ράβδος πρέπει $N \geq 0$ ή

$$\boxed{\frac{2h}{\ell} \geq \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta} \qquad (4)$$

Στη σχέση (4) μπορούμε να καταλήξουμε και διαφορετικά ως εξής:

Οι δυνάμεις $\vec{N}$ και $\vec{N}_1$ ασκούνται στο ίδιο σημείο της ράβδου και επομένως μπορούν να αντικατασταθούν από την συνισταμένη τους $\vec{A}$ που φαίνεται στο σχήμα. Για να ισορροπεί επομένως η ράβδος θα πρέπει οι φορείς των δυνάμεων $\vec{w}$, $\vec{F}$ και $\vec{A}$ να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επειδή η $\vec{N}$ μπορεί να έχει φορά μόνο προς τα πάνω, θα πρέπει το σημείο τομής των φορέων της $\vec{F}$ και του $\vec{w}$ να βρίσκεται ψηλότερα από το άκρο Κ όπως φαίνεται στο σχήμα. Άρα,

$$x \leq \frac{\ell}{2}\eta\mu\theta$$

Αλλά,

$$x = \frac{\frac{\ell}{2} - \frac{h}{\eta\mu\theta}}{\eta\mu\theta} \Rightarrow x = \frac{\ell}{2\eta\mu\theta} - \frac{h}{\eta\mu^2\theta}$$

Αντικαθιστώντας,

$$\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta \leq \frac{2h}{\ell}$$

που είναι η σχέση (4).

Για να ισχύει η (4) για κάθε τιμή της γωνίας θ αρκεί να ισχύει για την μέγιστη τιμή, της $f(\theta) = \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta$ για, $\tau o\xi\eta\mu\left(\frac{h}{\ell}\right) < \theta < \frac{\pi}{2}$. Το ακρότατο της f βρίσκεται υπολογίζοντας την ρίζα της, $f'(\theta) = 0$, στο παραπάνω διάστημα το οποίο είναι προφανώς μέγιστο.

$$f'(\theta) = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^3\theta - 2\eta\mu^2\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Rightarrow 1 - 3\eta\mu^2\theta \Rightarrow \eta\mu\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Άρα

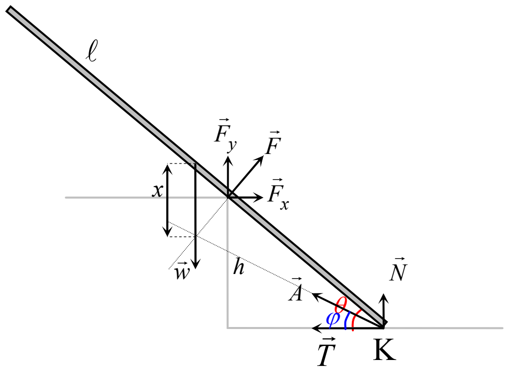
$$f_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Επομένως η ζητούμενη σχέση είναι,

$$\boxed{\frac{h}{\ell} \geq \frac{\sqrt{3}}{9} \simeq 0{,}19}$$

Β) Στην περίπτωση αυτή η ράβδος ισορροπεί αν για την απαιτούμενη στατική τριβή ισχύει,

$$T \leq \mu N \Rightarrow \sigma\phi\varphi \leq \mu$$



Αλλά,

$$\sigma\phi\varphi = \frac{\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta - x} \Rightarrow \sigma\phi\varphi = \frac{\frac{\ell}{2}\sigma\upsilon\nu\theta}{\frac{\ell}{2}\eta\mu\theta - \frac{\ell}{2\eta\mu\theta} + \frac{h}{\eta\mu^2\theta}} \Rightarrow \sigma\phi\varphi = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta}{\frac{2h}{\ell} - \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta}$$

Άρα,

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta}{\frac{2h}{\ell} - \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta} \leq \mu$$

ή

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta + \mu \cdot \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta - \frac{2\mu h}{\ell} \leq 0} \qquad (5)$$

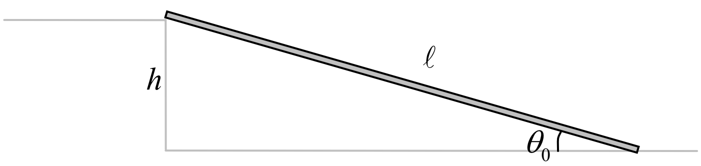
Η (5) μπορεί να γραφεί ως,

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta}{\mu} + \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta - \frac{2h}{\ell} \leq 0$$

η οποία για $\mu \to \infty$ οδηγεί όπως θα έπρεπε στην σχέση (4), αφού η περίπτωση αυτή είναι ισοδύναμη με το (α) ερώτημα. Ο μόνος τρόπος να μην ισορροπεί η ράβδος είναι να χάσει την επαφή με το έδαφος.

Η ακριβής αλγεβρική λύση της (5) για κάθε τιμή των μ και λ είναι αδύνατη. Μπορούμε όμως μελετώντας την να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα.

- Υπάρχει σίγουρα περιοχή τιμών της γωνίας θ με άνω όριο τις 90 μοίρες (κατακόρυφη θέση της ράβδου) στην οποία ισχύει η συνθήκη (5). Το άθροισμα, $\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^2\theta + \mu\cdot\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu^2\theta$, μηδενίζεται για $\theta = \frac{\pi}{2}$ και επομένως, αφού είναι μια συνεχής συνάρτηση της θ, γίνεται σίγουρα μικρότερο από οποιαδήποτε τιμή του όρου $\frac{2\mu h}{\ell}$ για κάποια περιοχή τιμών της γωνίας θ ($\theta_1 < \theta < \frac{\pi}{2}$).
- Όπως μπορεί κάποιος να καταλάβει και διαισθητικά αλλά και πειραματικά υπάρχουν τιμές των παραμέτρων μ και $\lambda = \frac{h}{\ell}$ για τις οποίες η ράβδος ισορροπεί σε δύο περιοχές τιμών της γωνίας θ. Ας δούμε σε ποιες περιπτώσεις η ράβδος ισορροπεί στην οριακή θέση που φαίνεται στο σχήμα,



Στη θέση αυτή $\eta\mu\theta = \lambda$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \sqrt{1-\lambda^2}$, οπότε η συνθήκη (5) γίνεται,

$$\lambda^2\sqrt{1-\lambda^2} + \mu\lambda\left(1-\lambda^2\right) - 2\mu\lambda \le 0$$

ή

$$\lambda\sqrt{1-\lambda^2} + \mu\left(1-\lambda^2\right) - 2\mu \le 0$$

και μετά τις πράξεις,

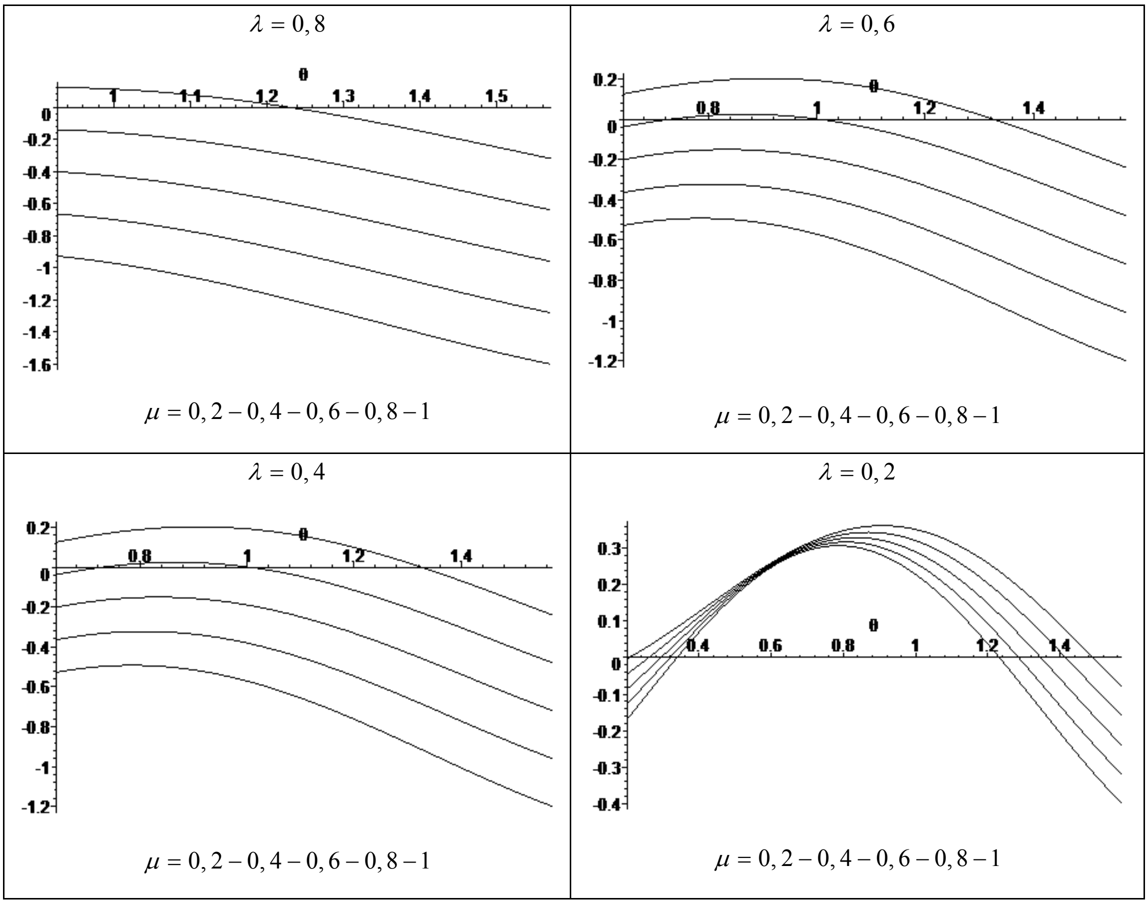
$$\mu \ge \frac{\lambda\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda^2}$$

Το δεύτερο μέλος της τελευταίας μεγιστοποιείται για $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$ και η μέγιστη τιμή του είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$. Άρα για $\mu > \frac{\sqrt{2}}{4}$ υπάρχει, για κάθε τιμή του λόγου λ, μια περιοχή γωνιών με κάτω όριο την τιμή, $\theta_0 = \tau o\xi\eta\mu(\lambda)$ στις οποίες η ράβδος ισορροπεί ($\theta_0 < \theta < \theta_1$).

Συμπερασματικά έχουμε τις περιπτώσεις:

1. **Ισορροπία της ράβδου σε κάθε θέση**
2. **Ισορροπία της ράβδου μόνο για** $\theta_2 < \theta < \frac{\pi}{2}$
3. **Ισορροπία της ράβδου για** $\tau o\xi\eta\mu(\lambda) < \theta < \theta_1$ **και** $\theta_2 < \theta < \frac{\pi}{2}$ $(\theta_1 < \theta_2)$

Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνονται οι τιμές του πρώτου μέλους της (5) σαν συνάρτηση της γωνίας θ ($\tau o\xi\eta\mu(\lambda) < \theta < \theta_1$**)**, για διάφορες τιμές των μ και λ. **Οι περιοχές γωνιών όπου η τιμή της παράστασης είναι αρνητική αντιστοιχούν σε ισορροπία.**



Σπύρος Χόρτης

schortis@otenet.gr