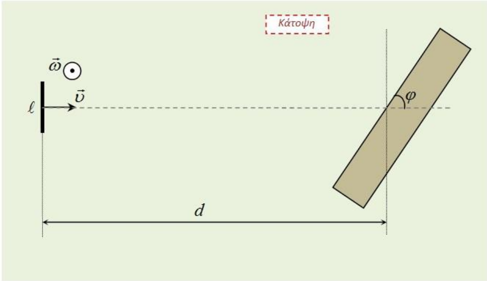
Ράβδος εναντίον τοίχου

Λεπτή ράβδος μήκους ℓ ολισθαίνει χωρίς τριβές στο οριζόντια δάπεδο, εκτελώντας μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και στροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Κατά την κίνησή της συναντά κατακόρυφο τοίχο υπό γωνία φ όπως φαίνεται στο σχήμα.

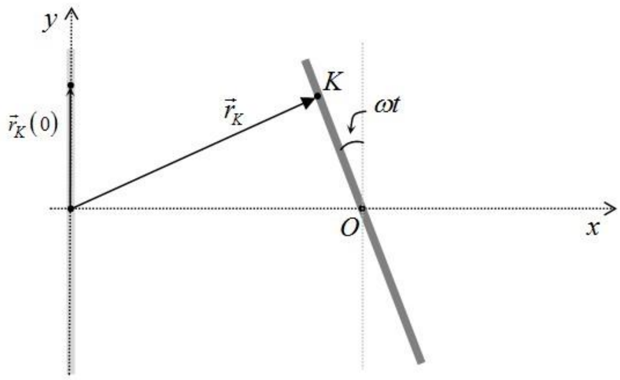


Υπολογίστε τις δυνατές τιμές της γωνιακής ταχύτητας ώστε όλα τα σημεία της ράβδου να συγκρουστούν ταυτόχρονα με τον τοίχο.

Λύση 1η (για … εργατικούς)

Θα διερευνήσουμε την περίπτωση η περιστροφή της ράβδου να γίνεται αντίθετα από την φορά των δεικτών του ρολογιού, αφού η αντίθετη περίπτωση είναι ισοδύναμη με την αλλαγή $\varphi \to -\varphi$.

Έστω K ένα τυχαίο σημείο της ράβδου με αρχική θέση $\vec{r}_K(0)=\hat{j}S$ με $-\frac{\ell}{2}\le S\le\frac{\ell}{2}$. Το



διάνυσμα θέσης του K την χρονική στιγμή t είναι,

$$\vec{r}_K(t)=\hat{i}\left(\upsilon t-S\eta\mu\omega t\right)+\hat{j}S\sigma\upsilon\nu\omega t \qquad (1)$$

Η εξίσωση της ευθείας που ορίζει η τομή του δαπέδου με τον τοίχο είναι,

$$y=\left(x-d\right)\varepsilon\varphi\varphi \qquad (2)$$

Το μέσον της ράβδου φτάνει στον τοίχο τη χρονική στιγμή $t_1=\frac{d}{\upsilon}$. Για να ικανοποιείται η απαίτηση του προβλήματος πρέπει την ίδια χρονική στιγμή να κτυπά στον τοίχο και το τυχαίο σημείο K . Δηλαδή οι συντεταγμένες του διανύσματος θέσης του K θα πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (2). Άρα,

$$S\sigma\upsilon\nu\omega t_1=\left(\upsilon t_1-S\eta\mu\omega t_1-d\right)\varepsilon\varphi\varphi$$

ή

$$1+\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega d}{\upsilon}\right)\varepsilon\varphi\varphi=0$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα, $\varepsilon\varphi\left(\alpha\pm\beta\right)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha\pm\varepsilon\varphi\beta}{1\mp\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$ βρίσκουμε, $1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\left(\alpha-\beta\right)}$, οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται,

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega d}{\upsilon}\right)-\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega d}{\upsilon}-\varphi\right)}=0 \tag{3}$$

Ο αριθμητής του πρώτου μέλους της (3) μηδενίζεται για, $\frac{\omega d}{\upsilon}=n\pi+\varphi$, $n\in\mathbb{Z}$, αλλά οι τιμές αυτές μηδενίζουν και τον παρονομαστή. Έχουμε δηλαδή απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$. Υπολογίζοντας το όριο, για $\frac{\omega d}{\upsilon}\to n\pi+\varphi$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to n\pi+\varphi}\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi\varphi}{\varepsilon\varphi\left(x-\varphi\right)}=1+\varepsilon\varphi^2\varphi\neq 0$.

Άρα οι λύσεις της (3) είναι οι τιμές που απειρίζουν τον παρονομαστή. Δηλαδή,

$$\frac{\omega d}{\upsilon}-\varphi=\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}$$

ή

$$\boxed{\frac{\omega d}{\upsilon}=\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}+\varphi}\quad n=0,1,2,... \tag{4}$$

Η συνθήκη (4) είναι **αναγκαία αλλά όχι ικανή**. Μας εξασφαλίζει ότι η ράβδος εφάπτεται στον τοίχο τη χρονική στιγμή t_1 , αλλά δεν μας εγγυάται ότι, λίγο πριν ένα τμήμα της δεν θα είχε περάσει τα όρια ενός "φανταστικού" τοίχου που θα ήταν στην ίδια θέση (που σημαίνει ότι η ράβδος χτυπά στον τοίχο πριν το σημείο Ο φτάσει σ’ αυτόν).

Για να εξασφαλίσουμε ότι δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο μπορούμε να σκεφτούμε ως εξής. Αν αναλύσουμε την ταχύτητα των σημείων της ράβδου σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη και μια παράλληλη στον τοίχο, τότε θα πρέπει η κάθετη συνιστώσα τη στιγμή t_1, να έχει κατεύθυνση προς τον τοίχο και αυτό να ισχύει για κάθε σημείο της ράβδου.

Από την εξίσωση (1) βρίσκουμε για την ταχύτητα του τυχαίου σημείου K , τη χρονική στιγμή t_1,

$$\vec{\upsilon}_K\left(t_1\right)=\hat{i}\left(\upsilon-S\omega\sigma\upsilon\nu\frac{\omega d}{\upsilon}\right)-\hat{j}S\omega\eta\mu\frac{\omega d}{\upsilon}$$

Οι συντεταγμένες υ'_x και υ'_y της ταχύτητας του Κ ως προς σύστημα συντεταγμένων $x'Oy'$ που προκύπτει με περιστροφή του xOy αντιωρολογιακά κατά γωνία φ , θα είναι,

$$\begin{pmatrix}\upsilon'_x\\ \upsilon'_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi\\ -\eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\upsilon_x\\ \upsilon_y\end{pmatrix}$$

Η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας είναι η υ'_y,

$$\upsilon'_y = -\left(\upsilon - S\omega\sigma\upsilon\nu\frac{\omega d}{\upsilon}\right)\eta\mu\varphi - S\omega\eta\mu\frac{\omega d}{\upsilon}\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \upsilon'_y = -\upsilon\eta\mu\varphi - S\omega\left(\eta\mu\frac{\omega d}{\upsilon} - \varphi\right)$$

και αντικαθιστώντας από την εξίσωση (4),

$$\upsilon'_y = -\upsilon\eta\mu\varphi - (-1)^n S\omega$$

Για να έχει φορά προς τον τοίχο πρέπει, $\upsilon'_y \le 0$, άρα,

$$\upsilon\eta\mu\varphi + (-1)^n S\omega \ge 0$$

Αλλά $-\frac{\ell}{2} \le S \le \frac{\ell}{2}$ και n ακέραιος, επομένως η ανισότητα θα ισχύει για κάθε τιμή των n, S αν,

$$\boxed{\upsilon\eta\mu\varphi \ge \frac{\omega\ell}{2}} \qquad (5)$$

Παρατήρηση: Η αντικατάσταση $\varphi \to -\varphi$ οδηγεί δεν αλλάζει τον περιορισμό (5). Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας στροφής είναι $\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi \\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi \end{pmatrix}$ και η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα προκύπτει, $\upsilon'_y = \upsilon\eta\mu\varphi - (-1)^n S\omega$. Τότε όμως για να έχει φορά προς τον τοίχο θα πρέπει $\upsilon'_y \ge 0$, οπότε καταλήγουμε και πάλι στην (5).

Αντικαθιστώντας την ταχύτητα υ από την εξίσωση (4) βρίσκουμε μετά από μερικές πράξεις τις αποδεκτές τιμές του ακέραιου n.

$$\boxed{n \le \frac{\frac{2d\eta\mu\varphi}{\ell} - \varphi}{\pi} - \frac{1}{2}} \qquad (6)$$

Συνοψίζοντας:

<u>Αντιωρολογιακή φορά</u>

$$\omega = \frac{\upsilon}{d}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad n = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{\frac{2d\eta\mu\varphi}{\ell} - \varphi}{\pi} - \frac{1}{2}\right] \qquad (7)$$

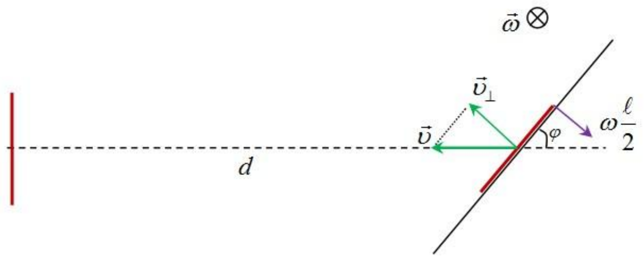
<u>Ωρολογιακή φορά.</u>

$$\omega = \frac{\upsilon}{d}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \quad n = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{\frac{2d\eta\mu\varphi}{\ell} + \varphi}{\pi} - \frac{1}{2}\right] \tag{8}$$

όπου, $[x] =$ ακέραιο μέρος του x.

Λύση 2[η] ***(για … τεμπέληδες)***

Ας υποθέσουμε ότι τραβάμε σε βίντεο την κίνηση της ράβδου μέχρι την επαφή της με τον τοίχο και στη συνέχεια προβάλουμε την λήψη "ανάποδα". Θα δούμε την ράβδο να φεύγει από τον τοίχο και να κινείται προς την αρχική θέση με αντίθετες ταχύτητες μεταφορικής και στροφικής κίνησης. Λόγω της μεταφορικής κίνησης τα σημεία της ράβδου απομακρύνονται από τον τοίχο με ταχύτητα μέτρου, $\upsilon\eta\mu\varphi$, ενώ λόγω της στροφικής κίνησης τα μισά επίσης



απομακρύνονται και τα άλλα μισά πλησιάζουν με ταχύτητα ανάλογη της απόστασης από το μέσον της. Πιο γρήγορα πλησιάζει το αντίστοιχο άκρο της ράβδου με ταχύτητα μέτρου $\omega\frac{\ell}{2}$. Αφού όμως όλα τα σημεία θα απομακρύνονται από τον τοίχο θα πρέπει,

$$\upsilon\eta\mu\varphi \geq \omega\frac{\ell}{2}$$

που είναι η εξίσωση (5).

Επίσης για να φτάσει η ράβδος στην αρχική θέση με το σωστό προσανατολισμό θα πρέπει να περιστραφεί κατά $\varphi + \frac{\pi}{2} + n\pi = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \varphi$ σε χρόνο $\frac{d}{\upsilon}$. Άρα

$$\frac{\omega d}{\upsilon} = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \varphi$$

που είναι η εξίσωση (4).

Σπύρος Χόρτης

schortis@otenet.gr