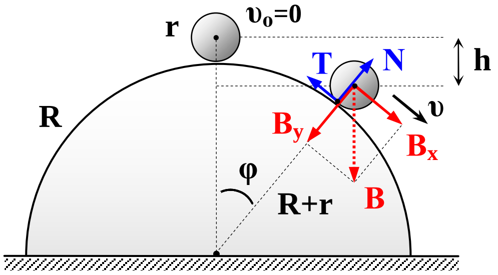
Σφαίρα σε κυρτό ημισφαίριο
Μέχρι ποιο σημείο κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει;



$$h = (R+r)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)$$
$$B_x = mg\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi, \quad B_y = mg\cdot\eta\mu\varphi$$

Το κυρτό ημισφαίριο του σχήματος έχει ακτίνα **R** και στην κορυφή του βρίσκεται σφαίρα ακτίνας **r**. Ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ ημισφαιρίου και σφαίρας είναι **μ**. Αν αφήσουμε τη σφαίρα ελεύθερη, θα αρχίσει να κινείται πάνω στο ημισφαίριο και σε κάποια θέση (κάποια γωνία **φ** ως προς την κατακόρυφη) θα χάσει την επαφή της μ' αυτό.

Η κίνησή της είναι **αρχικά κύλιση** αλλά σε κάποια θέση αρχίζει να **γλιστράει**.

Θα εξετάσουμε πώς επηρεάζεται η θέση αυτή από την τιμή του συντελεστή τριβής και πόσο κοντά είναι στο σημείο που χάνεται η επαφή.

(Για τη σφαίρα, ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της: $I = {}^2/_5 \cdot m \cdot r^2$).

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>:

(Τα σύμβολα αντιστοιχούν σε μέτρα μεγεθών).

1. Η ταχύτητα **υ** του κέντρου μάζας της σφαίρας σε γωνία **φ** ενώ κυλίεται θα είναι:

$${}^1/_2 \cdot m\cdot\upsilon^2 + {}^1/_2 \cdot I\cdot\omega^2 = m\cdot g\cdot h \implies$$

$${}^1/_2 \cdot m\cdot\upsilon^2 + {}^1/_2 \cdot {}^2/_5 \cdot m\cdot r^2\cdot(\upsilon/r)^2 = m\cdot g\cdot(R+r)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\varphi) \implies \ldots \implies$$

$$\boxed{\upsilon^2 = \frac{10\cdot g\cdot(R+r)\cdot(1-\sigma\upsilon\nu\varphi)}{7}} \quad (i)$$

2. Λόγω της καμπυλόγραμμης κίνησης πάνω στο ημισφαίριο και μέχρι να χαθεί η επαφή, ισχύει:

$$\Sigma F_y = m\cdot\alpha_\kappa \implies m\cdot g\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi - N = m\cdot\upsilon^2/(R+r) \quad \text{και:} \quad N \geq 0$$

(Η ισότητα οριακά στο σημείο που σφαίρα εγκαταλείπει το ημισφαίριο.)

Αν υποθέσουμε ότι μέχρι το σημείο που χάνεται η επαφή είχαμε κύλιση χωρίς ολίσθηση, τότε η **N**, με τη βοήθεια της **(*i*)**, γίνεται:

$$\boxed{N = \frac{mg\cdot(17\cdot συνφ - 10)}{7} \geq 0} \quad \textit{(ii)}$$

Από εδώ μπορούμε να υπολογίσουμε τη γωνία όπου χάνεται η επαφή:

$$17\cdot συνφ - 10 = 0 \Longrightarrow συνφ = 10/17 \text{ ή:}$$

$$\boxed{φ \approx 54^o}$$

Για σύγκριση, αν το ημισφαίριο ήταν λείο και η σφαίρα έκανε μόνο μεταφορική κίνηση, η επαφή θα χανόταν σε γωνία: $\boxed{φ \approx 48^o}$ **(συνφ=2/3)**.

---

3. Η στατική τριβή τώρα που χρειάζεται για την κύλιση της σφαίρας είναι:

$$ΣF_x = m\cdot α_{cm} \Longrightarrow m\cdot g\cdot ημφ - T = m\cdot α_{cm}$$

$$Στ_{cm} = I\cdot α_{γων} \Longrightarrow T\cdot R = {}^{2}/_{5}\cdot m\cdot R^2\cdot α_{cm}/R \Longrightarrow T = {}^{2}/_{5}\cdot m\cdot α_{cm}$$

και απαλείφοντας την $α_{cm}$:

$$\boxed{T = \frac{2\cdot mg\cdot ημφ}{7}} \quad \textit{(iii)}$$

4. Εφόσον δεν υπάρχει ολίσθηση ισχύει:

$$T \leq μ\cdot N$$

Με αντικατάσταση των ***(ii)***, ***(iii)*** και πράξεις βρίσκουμε:

$$\boxed{μ \geq \frac{2\cdot ημφ}{17\cdot συνφ - 10}} \quad \textit{(iv)}$$

Από αυτή τη σχέση φαίνεται ότι όσο μεγαλώνει η γωνία **φ**, τόσο μεγαλύτερος συντελεστής τριβής απαιτείται για να συνεχίζεται η κύλιση χωρίς ολίσθηση. Όσο μάλιστα πλησιάζουμε τις **54°** που βρήκαμε στην παράγραφο **(2)**, η τιμή του αναγκαίου συντελεστή τριβής τείνει στο άπειρο.

Προφανώς, η σφαίρα θα αρχίσει να ολισθαίνει πριν χάσει την επαφή της. Έτσι οι **54°** αποτελούν προσεγγιστική λύση. Όσο μεγαλύτερη βέβαια είναι η τιμή του **μ** τόσο μικρότερο είναι το σχετικό σφάλμα.

Ενδεικτικά, παραθέτουμε πίνακα με τις γωνίες (περίπου) όπου αρχίζει η ολίσθηση, για διάφορες τιμές του **μ**:

μ	0	0,1	0,2	0,4	0,7	1	4	8	→ ∞
φ	0°	18°	29°	39°	45°	48°	52°	53°	→ 54°

(Βέβαια, δύσκολα συναντάμε μεταξύ των υλικών τιμές του **μ** μεγαλύτερες από **1**. Για παράδειγμα, το καουτσούκ μπορεί με κάποια υλικά να φτάσει την τιμή **μ=4**).