Κινούμενοι στην πίστα της Daytona

Τα αγωνιστικά αυτοκίνητα της κατηγορίας Nascar κινούνται σε πίστα που παρουσιάζει κλίση με το οριζόντιο επίπεδο, (banked road). Ο πιο φημισμένος αγώνας του πρωταθλήματος είναι ο αγώνας στην πίστα της Daytona στη Φλόριντα των ΗΠΑ γνωστός και ως Daytona 500. Η μεγαλύτερη κλίση του δρόμου με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\theta=31^0$ και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς σε αυτό το τμήμα του δρόμου είναι R=305m,(1000ft). Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των ελαστικών και του δαπέδου είναι μ=0,5. Αν ένα τέτοιο αυτοκίνητο με μάζα m=1497kg, (3300pounds) κινείται στην πίστα της Daytona να απαντήσετε στις ακόλουθες ερωτήσεις.

i) Η ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινηθεί το αυτοκίνητο χωρίς να απαιτείται η παρουσία τριβής είναι:

α) $\upsilon=\sqrt{3050}\simeq 55m/s$ **β)** $\upsilon=\sqrt{1830}\simeq 43m/s$ **γ)** $\upsilon=\sqrt{1525}\simeq 39m/s$

ii) Η μέγιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο στην πίστα είναι:

α) $\upsilon_{max}=\sqrt{\frac{3355}{0,7}}\simeq 69m/s$ **β)** $\upsilon_{max}=\sqrt{\frac{3355}{0,5}}\simeq 82m/s$ **γ)** $\upsilon_{max}=\sqrt{\frac{3355}{0,6}}\simeq 75m/s$

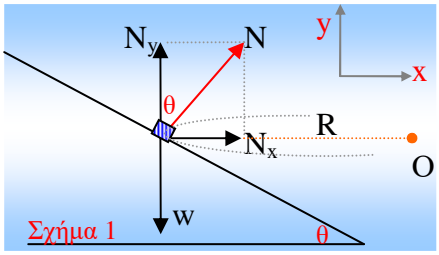
iii) Η ελάχιστη ταχύτητα με την οποία μπορεί να κινείται το αυτοκίνητο στην πίστα είναι:

α) $\upsilon_{min}=\sqrt{\frac{305}{1,3}}\simeq 15m/s$ **β)** $\upsilon_{min}=\sqrt{\frac{305}{1,1}}\simeq 17m/s$ **γ)** $\upsilon_{min}=\sqrt{\frac{305}{1,5}}\simeq 14m/s$

Θεωρείστε το μέγιστο συντελεστή στατικής τριβής ίσο με το συντελεστή τριβής ολίσθησης.
Για τις πράξεις χρησιμοποιείστε κομπιουτεράκι.
Δίνεται $g=10m/s^2$ και $\varepsilon\varphi(31^o)=0,6$

Απάντηση

i) Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα y προκύπτει:



Σχήμα 1

$\Sigma F_y=0\Rightarrow N_y-w=0\Rightarrow N\sigma\upsilon\nu(\theta)=mg$ (1)

Στον οριζόντιο άξονα x η συνισταμένη δύναμη έχει ρόλο κεντρομόλου. Παρατηρούμε από το διπλανό σχήμα ότι η κάθετη δύναμη επαφής έχει συνιστώσα στο κέντρο της κυκλικής τροχιάς. Έτσι μπορεί από μόνη της να καλύψει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης για κάποια κατάλληλη τιμή ταχύτητας χωρίς να είναι απαραίτητη η παρουσία τριβής.

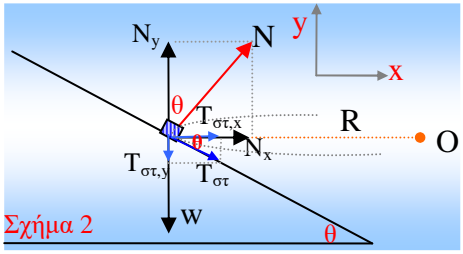
$\Sigma F_x=m\upsilon^2/R\Rightarrow N_x=m\upsilon^2/R\Rightarrow N\eta\mu(\theta)=m\upsilon^2/R$ (2)

$(2)\div(1)\Rightarrow\varepsilon\varphi(\theta)=\upsilon^2/gR\Rightarrow$

$\boxed{\upsilon=\sqrt{Rg\varepsilon\varphi(\theta)}}$ με αντικατάσταση $\upsilon=\sqrt{1830}\simeq 43m/s$

Σωστή επιλογή το **β**.

ii) Αν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από την τιμή υ=√Rgεφ(θ) τότε απαιτείται πρόσθετη δύναμη στη διεύθυνση της επιβατικής ακτίνας κατά μήκος του κέντρου Ο της κυκλικής τροχιάς. Αυτό τον ρόλο θα τον καλύψει η στατική τριβή η οποία θα προβάλει συνιστώσα προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς.



Σχήμα 2

Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα y προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \overset{(+)\uparrow}{\Rightarrow} N_y - T_{\sigma\tau,y} - w = 0 \Rightarrow N\sigma\upsilon\nu(\theta) - \mathrm{T}_{\sigma\tau}\eta\mu(\theta) - mg = 0 \quad (3)$$

Στον οριζόντιο άξονα x η συνισταμένη των δυνάμεων έχει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_{\mathrm{K}} \overset{(+)\rightarrow}{\Rightarrow} N_x + T_{\sigma\tau,x} = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\eta\mu(\theta) + \mathrm{T}_{\sigma\tau}\sigma\upsilon\nu(\theta) = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (4)$$

Η μέγιστη επιτρεπτή ταχύτητα προκύπτει όταν η στατική τριβή παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της δηλ. $T_{\sigma\tau.max}=\mu N$ (5). Όσο μεγαλώνει η στατική τριβή αυξάνεται η $T_{\sigma\tau,x}$ και η δύναμη N όπως παρατηρείται από τη σχέση (3) άρα και η συνιστώσα της N_x. Έτσι η σχέση (4) μεγιστοποιείται.

$$(3) \overset{(5)}{\Rightarrow} N\sigma\upsilon\nu(\theta) - \mu\mathrm{N}\eta\mu(\theta) - mg = 0 \Rightarrow \mathrm{N}\left(\sigma\upsilon\nu(\theta) - \mu\eta\mu(\theta)\right) = mg \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu(\theta) - \mu\eta\mu(\theta)} \quad (6)$$

$$(4) \overset{(5)}{\Rightarrow} N\eta\mu(\theta) + \mu N\sigma\upsilon\nu(\theta) = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \Rightarrow N\left(\eta\mu(\theta) + \mu\sigma\upsilon\nu(\theta)\right) = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \overset{(6)}{\Rightarrow}$$

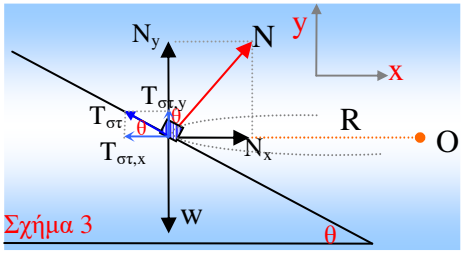
$$\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu(\theta) - \mu\eta\mu(\theta)}\left(\eta\mu(\theta) + \mu\sigma\upsilon\nu(\theta)\right) = m\frac{\upsilon_{\max}^2}{R} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{gR\left(\eta\mu(\theta) + \mu\sigma\upsilon\nu(\theta)\right)}{\sigma\upsilon\nu(\theta) - \mu\eta\mu(\theta)}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{gR\left(\varepsilon\varphi(\theta) + \mu\right)}{1 - \mu\cdot\varepsilon\varphi(\theta)}}}$$

Με αντικατάσταση $\upsilon_{\max} = \sqrt{\dfrac{10\cdot 305\left(0,6 + 0,5\right)}{1 - 0,5\cdot 0,6}} = \sqrt{\dfrac{3355}{0,7}} \simeq 69 m/s$

Σωστή επιλογή το **α**.

iii) Αν η ταχύτητα είναι μικρότερη από την τιμή υ=√Rgεφ(θ) τότε η στατική τριβή θα προβάλει συνιστώσα που θα απομακρύνεται από το κέντρο Ο της κυκλικής τροχιάς μιας και απαιτείται μικρότερη κεντρομόλος δύναμη.



Σχήμα 3

Από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα y προκύπτει:

$$\Sigma\vec{F}_y = \vec{0} \overset{(+)\uparrow}{\Rightarrow} N_y + T_{\sigma\tau,y} - w = 0 \Rightarrow N\sigma\upsilon\nu(\theta) + \mathrm{T}_{\sigma\tau}\eta\mu(\theta) - mg = 0 \quad (7)$$

Στον οριζόντιο άξονα x η συνισταμένη των δυνάμεων έχει ρόλο κεντρομόλου δύναμης.

$$\Sigma\vec{F}_x = m\vec{a}_{\mathrm{K}} \overset{(+)\rightarrow}{\Rightarrow} N_x - T_{\sigma\tau,x} = m\frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow N\eta\mu(\theta) - \mathrm{T}_{\sigma\tau}\sigma\upsilon\nu(\theta) = m\frac{\upsilon^2}{R} \quad (8)$$

Η ελάχιστη επιτρεπτή ταχύτητα προκύπτει όταν η στατική τριβή παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή της δηλ. $T_{\sigma\tau.max}=\mu N$ (9) Όσο μεγαλώνει η στατική τριβή αυξάνεται η $T_{\sigma\tau,x}$ και μειώνεται η δύναμη N_y όπως παρατηρείται από τη σχέση (7). Έτσι μειώνεται και η δύναμη N και η συνιστώσα της N_x. Τότε ελαχιστοποιείται η σχέση (8).

$$(7) \overset{(9)}{\Rightarrow} N\sigma\upsilon\nu(\theta) + \mu\mathrm{N}\eta\mu(\theta) - mg = 0 \Rightarrow \mathrm{N}\left(\sigma\upsilon\nu(\theta) + \mu\eta\mu(\theta)\right) = mg \Rightarrow$$

$$N = \frac{mg}{\sigma\upsilon\nu(\theta) + \mu\eta\mu(\theta)} \quad (10)$$

$$(8) \overset{(9)}{\Rightarrow} N\eta\mu(\theta) - \mu N\sigma\upsilon\nu(\theta) = m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R} \Rightarrow N\left(\eta\mu(\theta) - \mu\sigma\upsilon\nu(\theta)\right) = m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R} \overset{(10)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{mg}{\sigma\upsilon\nu(\theta) + \mu\eta\mu(\theta)}\left(\eta\mu(\theta) - \mu\sigma\upsilon\nu(\theta)\right) = m\frac{\upsilon_{\min}^2}{R} \Rightarrow \upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{gR\left(\eta\mu(\theta) - \mu\sigma\upsilon\nu(\theta)\right)}{\sigma\upsilon\nu(\theta) + \mu\eta\mu(\theta)}} \Rightarrow$$

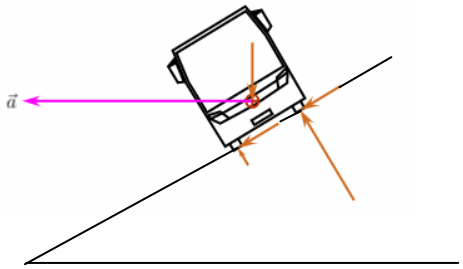
$$\boxed{\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{gR\left(\varepsilon\varphi(\theta) - \mu\right)}{1 + \mu\cdot\varepsilon\varphi(\theta)}}}$$

Με αντικατάσταση $\upsilon_{\min} = \sqrt{\frac{10\cdot 305\left(0,6 - 0,5\right)}{1 + 0,5\cdot 0,6}} = \sqrt{\frac{305}{1,3}} \simeq 15 m/s$

Σωστή επιλογή είναι το **α**.

Σχόλια

1. Η άσκηση λύθηκε θεωρώντας το αυτοκίνητο υλικό σημείο. Αν ληφθούν υπόψη οι διαστάσεις του αυτοκινήτου τότε τα πράγματα περιπλέκονται αρκετά. Για παράδειγμα οι κάθετες δυνάμεις του δρόμου στις ρόδες δεν είναι ίσες, παίζει ρόλο το ύψος του αυτοκινήτου καθώς επηρεάζει τη θέση του κέντρου μάζας και πολλά άλλα.



2. Η σχέση της μέγιστης ταχύτητας για επίπεδο δρόμο δηλ. $\theta=0^o$ δίνει την μέγιστη ταχύτητα σε επίπεδο δρόμο $\upsilon_{\max,\theta=0^o} = \sqrt{\mu g R}$

3. Για να έχουμε μια εικόνα γιατί κατασκευάζουμε δρόμους με κλίση.
Έστω ένα αυτοκίνητο μάζας m

• Αν κινείται σε επίπεδο δρόμο με συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5 η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να κινηθεί είναι $\upsilon_{\max} = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{0,5\cdot 10\cdot 305} \Rightarrow \upsilon_{\max} = 39 m/s$

•Αν κινείται σε λείο δρόμο με κλίση θ=30° η επιτρεπτή ταχύτητα που μπορεί να κινηθεί είναι $\upsilon = \sqrt{Rg\varepsilon\varphi(\theta)} = \sqrt{305 \cdot 10 \cdot 0,57} \Rightarrow \upsilon = 42 m/s$

•Αν κινείται σε δρόμο με κλίση θ=30° και συντελεστή τριβής ολίσθησης μ=0,5 η μέγιστη ταχύτητα που μπορεί να κινηθεί είναι

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{gR(\varepsilon\varphi(\theta)+\mu)}{1-\mu \cdot \varepsilon\varphi(\theta)}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 305(0,57+0,5)}{1-0,5 \cdot 0,57}} = \sqrt{\frac{3263,5}{0,715}} \simeq 68 m/s$$

Χ. Αγριόδημας
chagriodimas@yahoo.gr
chagriodimas@gmail.com