Μια άλλη εξίσωση κύματος.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά, διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα. Θεωρώντας έναν άξονα x, με θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά, το κύμα φτάνει τη στιγμή t_o=0 σε σημείο Β στη θέση x_B=0,5m. Το σημείο Β τη στιγμή που φτάνει το κύμα, ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά) και φτάνει σε ακραία θέση ταλάντωσης με απομάκρυνση 0,5m, περνώντας ξανά για πρώτη φορά από την αρχική του θέση τη στιγμή t_1=0,5s. Τη χρονική στιγμή t_2=0,75s το κύμα φτάνει σε ένα άλλο σημείο Γ στη θέση $x_Γ$=2m.

i) Να γράψετε την εξίσωση του κύματος.

ii) Να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του κύματος και για τον θετικό ημιάξονα x τη χρονική στιγμή t_3=2s.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση φ=φ(t) της φάσης του σημείου Γ σε συνάρτηση με το χρόνο.

iv) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια ενός υλικού σημείου Δ μάζας 1mg το οποίο βρίσκεται στη θέση x=1m, τη στιγμή που το κύμα φτάνει στο σημείο Γ.

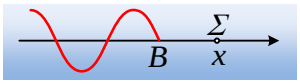
Απάντηση:

i) Αφού το κύμα για να διαδοθεί από το Β στο Γ χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t=t_2-t_o$=0,75s, η ταχύτητα διάδοσής του είναι:

$$\upsilon = \frac{d}{\Delta t} = \frac{x_Γ - x_B}{t_2} = \frac{2m - 0{,}5m}{0{,}75s} = 2m/s$$

Αλλά για να μεταβεί ένα υλικό σημείο που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας σε μέγιστη απομάκρυνση και να επιστρέψει ξανά στη θέση ισορροπίας του, χρειάζεται χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T}{2}$, όπου Τ η περίοδος της ταλάντωσης. Οπότε $T=2\cdot t_1$ =1s.

Η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Β θα είναι της μορφής:



$y_B = A\cdot ημωt$ ή

$$y_B = 0{,}5\cdot ημ2πt \quad \text{(S.I)}$$

Αλλά τότε το κύμα θα καθυστερήσει να φτάσει στο τυχαίο σημείο Σ, στη θέση x κατά:

$$t' = \frac{d}{\upsilon} = \frac{x - x_B}{\upsilon} = \frac{x - 0{,}5}{2}$$

Ενώ στη συνέχεια θα εκτελέσει μια όμοια ταλάντωση με εξίσωση:

$$y = 0{,}5\cdot ημ2π(t - t') = 0{,}5\cdot ημ2π\left(t - \frac{x - 0{,}5}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0{,}5\cdot ημ2π\left(t - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$$ με $t \geq 0$ και $x \leq 0{,}5+2t$ (μονάδες στο S.I.) (1)

Η εξίσωση (1) μας δίνει την απομάκρυνση του τυχαίου σημείου του μέσου σε συνάρτηση με το χρόνο και τη θέση του, συνεπώς είναι η εξίσωση του κύματος.

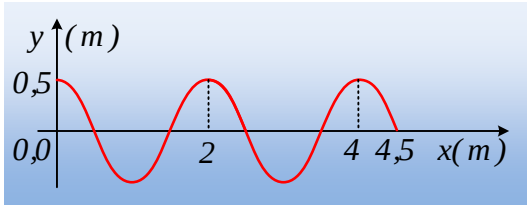
ii) Με αντικατάσταση στην (1) $t=t_3=2s$ έχουμε:

$$y=0{,}5\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=0{,}5\cdot\eta\mu 2\pi\left(2-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=0{,}5\cdot\eta\mu(4{,}5\pi-\pi x)\rightarrow$$

$$y=0{,}5\cdot\eta\mu(4{,}5\pi-\pi x)=0{,}5\cdot\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)=0{,}5\cdot\sigma\upsilon\nu(\pi x)\quad(2)$$

Με $x \le 0{,}5+2t$ ή $x \le 4{,}5m$.

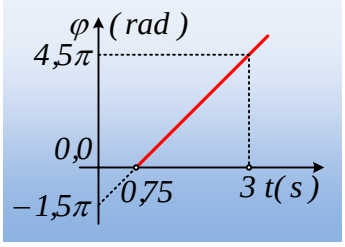
Οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2), το στιγμιότυπο του κύματος, είναι:



iii) Η φάση της απομάκρυνσης τυχαίου σημείου είναι $\varphi=2\pi\left(t-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)$,

οπότε για το σημείο Γ:

$$\varphi=2\pi\left(t-\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\right)=2\pi(t-0{,}75)=2\pi t-1{,}5\pi \text{ (S.I.) για } t\ge 0{,}75s$$



Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό σχήμα.

iv) Τη χρονική στιγμή $t_2=0{,}75s$ που το κύμα φτάνει στο σημείο Γ, το υλικό σημείο που βρίσκεται στο σημείο Δ έχει απομάκρυνση ταλάντωσης:

$$y_\Delta=0{,}5\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)=0{,}5\cdot\eta\mu 2\pi\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=0{,}5\cdot\eta\mu\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$$

Αλλά τότε η ταχύτητα ταλάντωσής του είναι:

$$\upsilon_\Delta=0{,}5\cdot 2\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\cdot 0{,}75-\frac{\pi}{2}\right)=-\pi\quad\text{(S.I.)}$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του υλικού σημείου είναι:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_\Delta^2=\frac{1}{2}10^{-6}\pi^2 J\approx 5\cdot 10^{-6}J$$

dmargaris@gmail.com