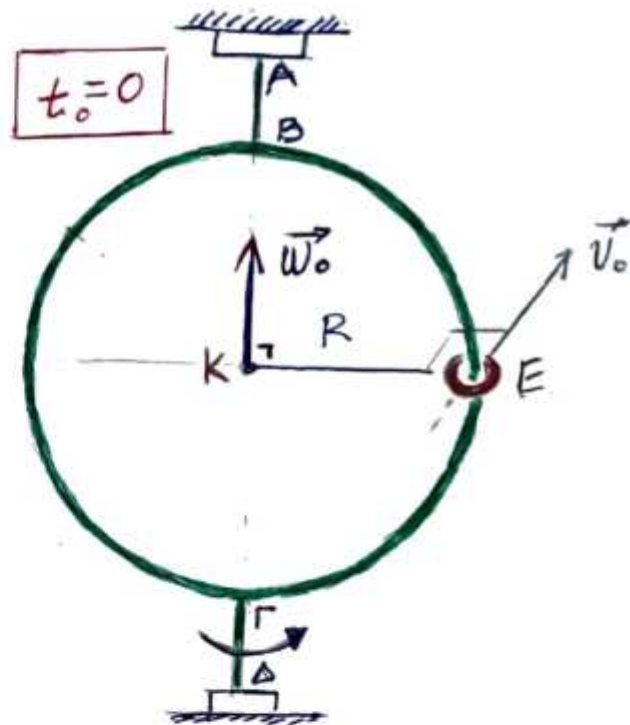


Α.Δ.Σ. - Α.Δ.Μ.Ε.

ΑΣΚΗΣΗ
(Α.Δ.Σ. - Α.Δ.Μ.Ε.)



Ο Δακτύλιος του σχήματος είναι αβαρής έχει ακτίνα $R = 0,9 \text{ m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από μια κατακόρυφη διαμέτρο του. Χωρίς τριβές. Τα κατακόρυφα βτηρίσματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι αβαρή. Μια μικρή χάντρα μάζας m , μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος του δακτυλίου. Την $t_0 = 0$ Το σύστημα δακτύλιος - χάντρα τίθεται σε περιστροφή με την χάντρα να βρίσκεται στην θέση E (βλέπε σχήμα) με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$. Δίνεται: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να βρεθεί η θέση της χάντρας την χρονική στιγμή που η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος δίνεται μέγιστη.

Λύση

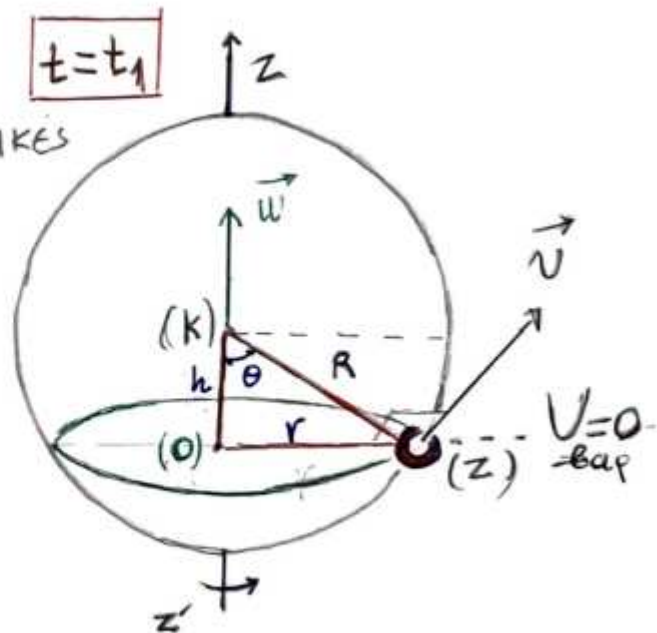
Στο σύστημα
Δακτύλιος - χάντρα
δρουν δυνάμεις εξωτερικές
στον άξονα από
Τα σημεία στήριξης
και το βάρος της
χάντρας, οι ροπές
των οποίων ως
προς τον άξονα
περίστροφής είναι
μηδέν.

Οι δυνάμεις στα
σημεία στήριξης
δεν παράχουν έργο αφού δεν μετατοπίζουν
το σημείο εφαρμογής τους και το βάρος
είναι συντηρητική δύναμη.
Συνεπώς διατηρείται η στρωφορμή και
η μηχανική ενέργεια.

Η χάντρα λόγω του βάρους της
αμέσως μετά την $t_0 = 0$ αρχίζει να
κατέρχεται ολισθαίνοντας πάνω στο
δακτύλιο.

Την στιγμή $t = t_1$ που μηδενίζεται η
κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας
της χάντρας η γωνιακή ταχύτητα
του συστήματος κινείται μέγιστη.

(1)



$$\text{Α.Δ.Σ.} : \vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow m v_0 R = m v r \Rightarrow$$

$$v_0 R = v r \sin \theta \Rightarrow \omega_0 \cdot R = v \sin \theta \Rightarrow$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 0,9 = v \sin \theta \Rightarrow 3\sqrt{3} = v \sin \theta \Rightarrow$$

$$3\sqrt{3} = v \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \Rightarrow 27 = v^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{27 = v^2 - v^2 \cos^2 \theta} \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΜΕ} : \frac{1}{2} m v_0^2 + m g h = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow$$

$$v_0^2 + 2gh = v^2 \Rightarrow (\omega_0 R)^2 + 2gR \cdot \sin \theta = v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{27 + 18 \sin \theta = v^2} \quad (2)$$

Οι (1) και (2) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους v και θ .

Θέτω $v^2 = x$ και $\sin \theta = \psi$ άρα:

$$\left. \begin{aligned} 27 &= x - x \cdot \psi^2 \\ 27 + 18\psi &= x \end{aligned} \right\} \quad 27 = 27 + 18\psi - (27 + 18\psi)\psi^2 \Rightarrow$$

$$0 = 18\psi - 27\psi^2 + 18\psi^3 \Rightarrow 0 = \psi(18 - 27\psi + 18\psi^2)$$

ή $\psi_1 = 0$ (αρχική θέση)

$$\text{ή } 18\psi^2 - 27\psi + 18 = 0 \Rightarrow \psi^2 - 1,5\psi + 1 = 0 \Rightarrow$$

$\psi_2 = -2$ να παρρητήται

$\psi_3 = \frac{1}{2}$ δεκτή.

$$\text{άρα } \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = 60^\circ}$$

Γιώργος Σφουρής