Οκτώ προτάσεις κατανόησης

των Μηχανικών Ταλαντώσεων

Θέμα 1ο

Υλικό σημείο μάζας εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος (Α). Κάποια χρονική στιγμή το κινητό έχει απομάκρυνση (χ) και κινητική ενέργεια (Κ). Να υπολογίσετε την ενέργεια της ταλάντωσης .Γνωστά (Α, χ, Κ).

Απάντηση 1η

Η ενέργεια της Α.Α.Τ. είναι : $E_T = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$ (1).

Από την γνωστή σχέση: $E_T = K + U \rightarrow \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 \chi^2 + K \rightarrow$

$\omega^2 = \frac{2K}{(A^2-\chi^2)m}$ άρα η (1) θα γίνει $E_T = \frac{1}{2} m \frac{2K}{(A^2-\chi^2)m} A^2 \rightarrow E_T = \frac{1}{2} \frac{2K}{(A^2-\chi^2)} A^2 \rightarrow$

$E_T = \frac{K}{(A^2-\chi^2)} A^2$

Θέμα 2ο

Αρμονικός ταλαντωτής έχει μάζα (m)και πλάτος (Α).Το μέτρο της μέγιστης δύναμης που δέχεται είναι (F_{max}). Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα του.
Γνωστά (m ,A , F_{max}).

Απάντηση 2η

Ισχύει $U_{max} = K_{max} \rightarrow \frac{1}{2} DA^2 = \frac{1}{2} m\upsilon_{max}^2$

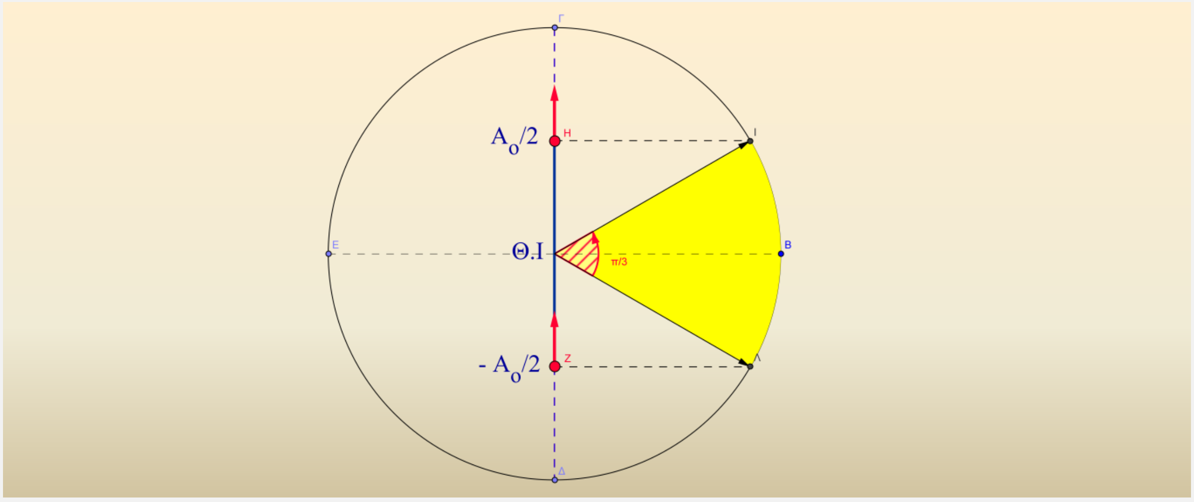
$\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\ |F_{max}| = DA \rightarrow |F_{max}|A = m\upsilon_{max}^2 \rightarrow$

$\upsilon_{max} = \sqrt{\frac{|F_{max}|A}{m}}$

Θέμα 3ο

Ένα σώμα κάνει Α.Α.Τ. Ο χρόνος που κάνει για να μεταβεί απ’ ευθείας από την θέση χ_1 = -A/2 στην θέση χ_2 = +A/2 είναι Δt = 2s. Να βρεθεί η περίοδος της ταλάντωσης.

Απάντηση 3η



<u>1ος Τρόπος</u>

Η μετάβαση απ' ευθείας του κινητού από την θέση χ_1 = - Α/2 στην θέση χ_2 = +Α/2 αντιστοιχεί σε γωνία Δφ = π/3 rad που διαγράφει η προβολή του στον κύκλο αναφοράς (δες τε το σχήμα).Η προβολή κάνει ομαλή κυκλική κίνηση με

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\Delta\varphi} \rightarrow T = 12s.$

<u>2ος Τρόπος</u>

Η εξίσωση της Α.Α.Τ είναι : $\chi = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$

Την στιγμή t_1 είναι στην θέση χ_1 = - Α/2 άρα $-\frac{A}{2} = A\,\eta\mu(\omega t_1 + \varphi_0) \rightarrow$

$\eta\mu(\omega t_1 + \varphi_0) = -\frac{1}{2} \rightarrow \omega t_1 + \varphi_0 = 2\kappa\pi + \frac{11\pi}{6}$ (1).

Την στιγμή t_2 είναι στην θέση χ_2 = Α/2 άρα $\frac{A}{2} = A\,\eta\mu(\omega t_2 + \varphi_0) \rightarrow$

$\eta\mu(\omega t_2 + \varphi_0) = \frac{1}{2} \rightarrow \omega t_2 + \varphi_0 = 2(\kappa + 1)\pi + \frac{\pi}{6}$ (2)

Αφαιρώ την (1) από την (2) $\omega t_2 - \omega t_1 = 2(\kappa+1)\pi + \frac{\pi}{6} - 2\kappa\pi - \frac{11\pi}{6} \rightarrow$

$\omega(t_2 - t_1) = \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{\pi}{3} \rightarrow T = 6\Delta t \rightarrow T = 12s.$

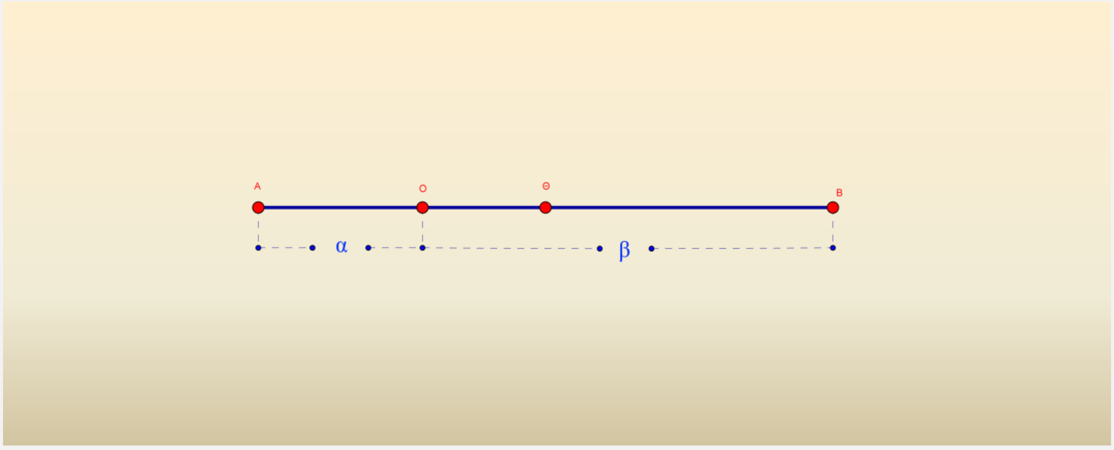
<u>Θέμα 4ο</u>

Ένα σωματίδιο κάνει Α.Α.Τ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Η ταχύτητα στα σημεία Α και Β είναι μηδέν. Έστω ένα σημείο Ο ανάμεσα στα Α και Β τέτοιο ώστε ΑΟ = α και ΒΟ = β. Η ταχύτητα στο μέσον του ΑΒ είναι υ.

Να υπολογίσετε την περίοδο της Α.Α.Τ. Γνωστά (α , β , υ)

Απάντηση 4η

Το κινητό κάνει Α.Α.Τ με ακραίες θέσεις τα σημεία Α και Β.
Το μήκος του ΑΒ θα είναι :
ΑΒ = ΑΟ + ΒΟ → ΑΒ = α + β .



Το πλάτος της ταλάντωσης είναι : $\boldsymbol{A} = \frac{(\alpha+\beta)}{2}$ και η θέση ισορροπίας (Θ.Ι) θα είναι το μέσο του ΑΒ. Άρα η ταχύτητα (υ) που έχει το κινητό στο μέσο του (ΑΒ) θα είναι η μέγιστη ταχύτητα.

$\upsilon_{max} = \upsilon$ $\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha}\, \upsilon_{max} = \omega\boldsymbol{A} \rightarrow \upsilon = \frac{2\pi}{T}\frac{\boldsymbol{(\alpha+\beta)}}{\boldsymbol{2}} \rightarrow T = \frac{\boldsymbol{\pi(\alpha+\beta)}}{\boldsymbol{\upsilon}}$

Θέμα 5ο

Ένα σώμα κάνει Α.Α.Τ με περίοδο Τ = 4s . Κάποια στιγμή περνά από από την θέση ισορροπίας και μετά από χρόνο Δt = 0.5s έχει ταχύτητα υ = $\sqrt{2}$ m/s.
Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.

Απάντηση 5η

Η εξίσωση της Α.Α.Τ είναι : $\chi = A\eta\mu(\omega t + \varphi_0)$.
Έστω ότι την στιγμή t_o περνά από την θέση $\chi_0 = 0$ δηλαδή την θέση ισορροπίας.
Άρα θα ισχύει: $0 = A\eta\mu(\omega t_0 + \varphi_0) \rightarrow \eta\mu(\omega t_0 + \varphi_0) = 0$

$\varepsilon\pi\varepsilon\iota\delta\acute{\eta}\ A \neq 0\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \ \omega t_0 + \varphi_0 = 2\kappa\pi$ (1).
Αυτό ισχύει επειδή την στιγμή $t_1 = t_0 + \Delta t$ που είναι μικρότερη από την στιγμή $t_1 = t_0 + T/4$ η ταχύτητα υ = $\sqrt{2}$ m/s > 0 είναι θετική.
Η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι : $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_0)$
και την στιγμή $t_1 = t_0 + \Delta t$ θα είναι $\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega(t_0 + \Delta t) + \varphi_0) \rightarrow$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(\omega t_0 + \omega\Delta t + \varphi_0) \rightarrow \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu(2\kappa\pi + \omega\Delta t) \rightarrow$$

$$\upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{2\pi}{T}\Delta t\right) \to \upsilon = \omega A\sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi + \frac{\pi}{4}\right) \to \upsilon = \omega A\frac{\sqrt{2}}{2} \to A = \frac{4}{\pi}\ m$$

Θέμα 6^{o}

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση ταχύτητας: $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$.
Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος
την χρονική στιγμή t = T/12. Γνωστά είναι : m , υ_{max} , T.

Απάντηση 6^{η}

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι $\Sigma F = \frac{\Delta P}{\Delta t} \to \Sigma F = -D\chi \to \frac{\Delta P}{\Delta t} = -D\chi$.
Αφού η εξίσωση ταχύτητας είναι $\upsilon = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu\omega t$ η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι $\chi = A\eta\mu\omega t$. Άρα $\frac{\Delta P}{\Delta t} = -D\chi \to \frac{\Delta P}{\Delta t} = -m\omega^2 A\eta\mu\omega t \to$

$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -m\omega^2 A\eta\mu\frac{2\pi}{T}t$ και για t = T/12 $\frac{\Delta P}{\Delta t} = -m\omega.\omega A\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{12}\right) \to$

$\frac{\Delta P}{\Delta t} = -m\frac{2\pi}{T}\upsilon_{max}\eta\mu\frac{\pi}{6} \to \frac{\Delta P}{\Delta t} = -m\frac{\pi}{T}\upsilon_{max}$

Θέμα 7^{o}

Ένα αεροπλάνο ταλαντώνεται με μέγιστη επιτάχυνση α_{max} = 0.4g και συχνότητα f = 0.3 Hz . Στατιστικά έχει υπολογιστεί ότι στις παραπάνω τιμές α_{max} , f ο αριθμός των επιβατών που παθαίνουν ναυτία είναι μεταξύ του 1/3 και του 1/2 του συνολικού αριθμού. Αν η ταλάντωση θεωρηθεί κατά προσέγγιση Α.Α.Τ. να υπολογιστεί το πλάτος των ταλαντώσεων του αεροπλάνου. Δίνεται το g = 10 m/s^2 και π^2=10.

Απάντηση 7^{η}

Η μέγιστη επιτάχυνση του αεροπλάνου είναι : α_{max} = 0.4g → α_{max} = 4 m/s^2. Αλλά γνωρίζουμε ότι $a_{max} = \omega^2 A \to a_{max} = 4\pi^2 f^2 A \to A = \frac{a_{max}}{4\pi^2 f^2} \to A = \frac{10}{9}m$

Θέμα 8^{o}

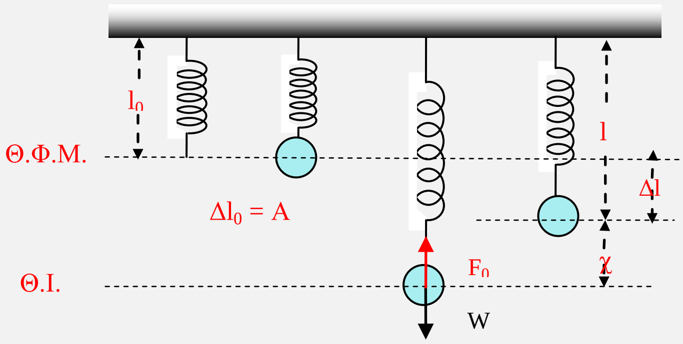
Στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου αμελητέας μάζας μήκους (l_0) και σταθεράς (k) συνδέουμε σταθερά σώμα μάζας (m) και το αφήνουμε ελεύθερο να εκτελέσει Α.Α.Τ. Να γίνουν οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις :
α. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης (U_T) – Μήκος ελατηρίου (l).
β. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης (U_T) - Επιμήκυνση ελατηρίου (Δl).
γ. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης (U_T) - Απομάκρυνση από την Θ.Ι. (χ).
Γνωστά : m , g , k , l_0

Απάντηση 8^{η}

Το σώμα την στιγμή (t = 0) αφήνεται από την θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου .

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι ίσο με την απόσταση (Δl_0) της θέσης του φυσικού μήκους από την Θ.Ι

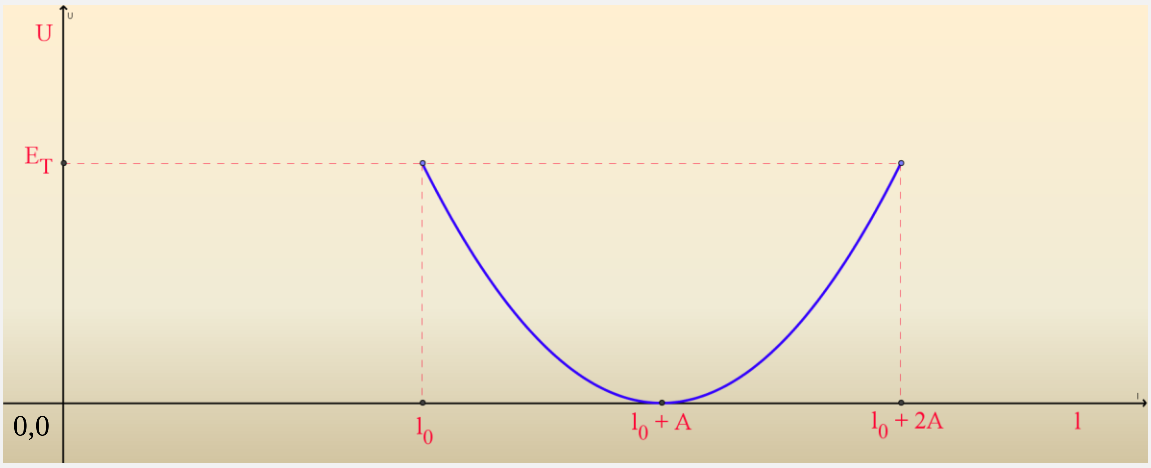
Στην Θ.Ι ισχύει : $F_0 = W \rightarrow mg = k\Delta l_0 \;\rightarrow\; \Delta l_0 = \frac{mg}{k}$ άρα $A = \frac{mg}{k}$.



α. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης (U_T) – Μήκος ελατηρίου (l).

$$U_T = \frac{1}{2}\,k\chi^2 \text{ αλλά } \chi = l_0 + A - l \text{ άρα}$$

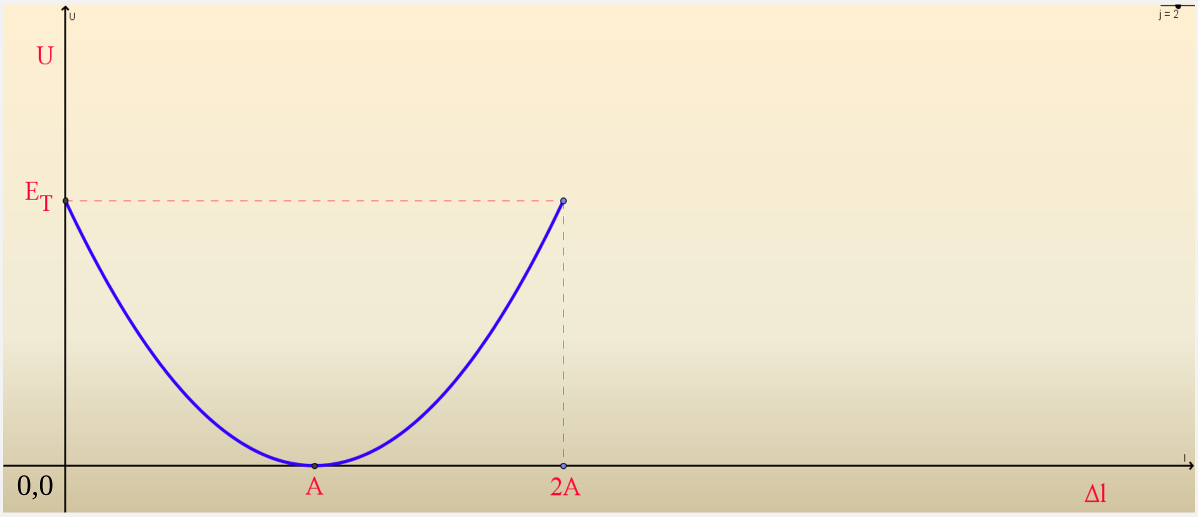
$U_T = \frac{1}{2}\,k(l_0 + A - l\,)^2$ με $l_0 \leq l \leq \; l_0 + \; 2A$



β. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης (U_T) - Επιμήκυνση ελατηρίου (Δl)

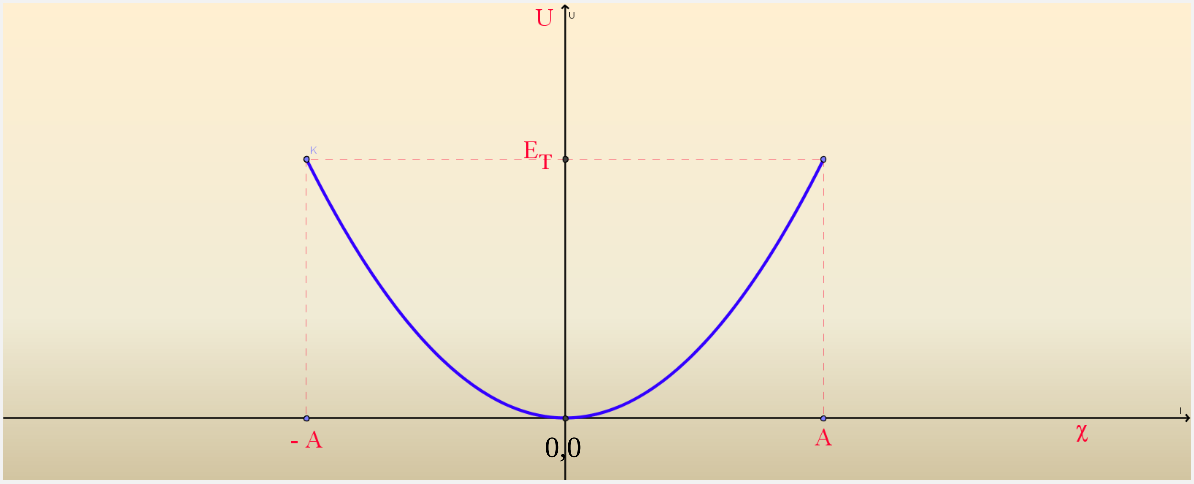
$$U_T = \frac{1}{2}\,k\chi^2 \text{ αλλά } \chi = A - \;\Delta l \text{ άρα}$$

$U_T = \frac{1}{2}\,k(A - \Delta l\,)^2$ με $0 \leq \Delta l \leq \; 2A$



γ. Δυναμική ενέργεια ταλάντωσης (U_T) - Απομάκρυνση από την Θ.Ι. (χ).

$U_T = \frac{1}{2} k\chi^2$ με $-A \le \chi \le +A$



Σχόλιο

Οι παραπάνω προτάσεις ελέγχου της κατανόησης της Α.Α.Τ έχουν δοθεί μαζί με άλλες χωριστά σε διάφορα test τα δύο τελευταία χρόνια.

Η επιλογή τους έγινε με κριτήριο το ποσοστό αποτυχίας.

Θεώρησα καλό να τις προτείνω με την ελπίδα ότι μπορεί να βοηθήσουν τους μαθητές μας να ελέγξουν σε ένα βαθμό την ετοιμότητα τους στο 2^0 Θέμα και όχι μόνο.

Ελπίζω να είναι χρήσιμες .

Γιάννης Δογραματζάκης