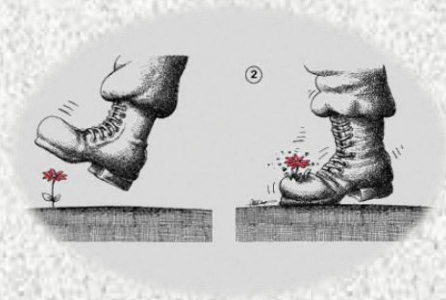
Μην πεις ποτέ : Τέλος … οι Ταλαντώσεις

Ένας μικρός πρόλογος

Αυτές οι Ταλαντώσεις.
Κινήσεις γεμάτες Εκπλήξεις.
Ανατροπές. Αμφισβητήσεις.

Πιστεύω ότι αν κάποιος Φυσικός έχει ασχοληθεί σοβαρά με τις ταλαντώσεις και ερωτηθεί :
- Πότε ‘’τελειώνουν’’;
Τότε η πιο πιθανή απάντηση που θα δώσει είναι :



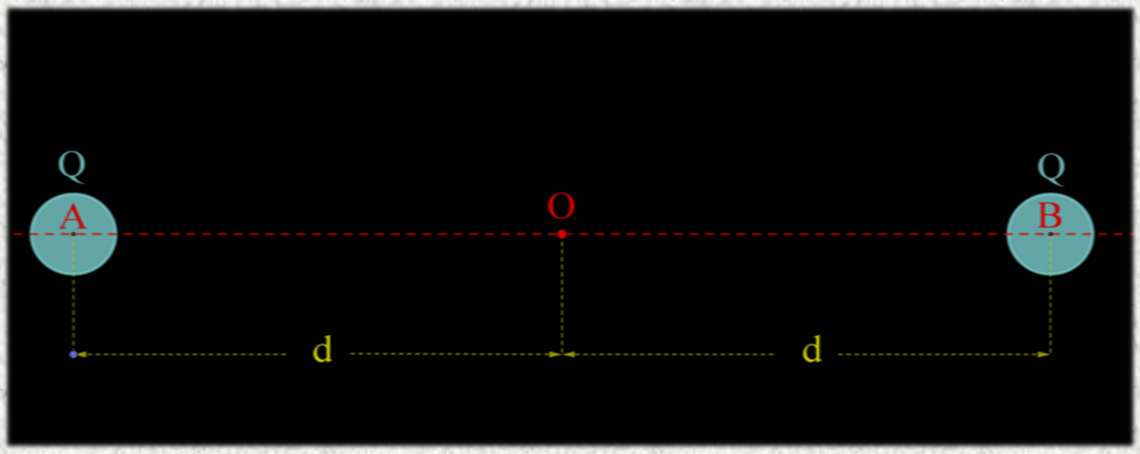
-Ποτέ. Πάντα υπάρχει ένα περίεργο ‘’ κάτι’’.
Που χρειάζεται να συζητηθεί. Να μελετηθεί.
Να διερευνηθεί.

Κάθε φορά εκεί που φτάνω να πω :
- Τέλος οι ταλαντώσεις.
Ξαφνικά βρίσκεται αυτό το απίθανο ‘’κάτι’’ που με κάνει να νοιώσω ‘’Πρωτάρης’’.
Όσο ‘’Αθώες’’ και αν φαίνονται … πάντα είναι ‘’Ένοχες’’ για την Φυσική …‘’Ανασφάλεια’’ που μου προκαλούν.

Εδώ και καιρό ασχολούμαι με μια περίπτωση ταλάντωσης που θα ήθελα να μοιραστώ μαζί σας.

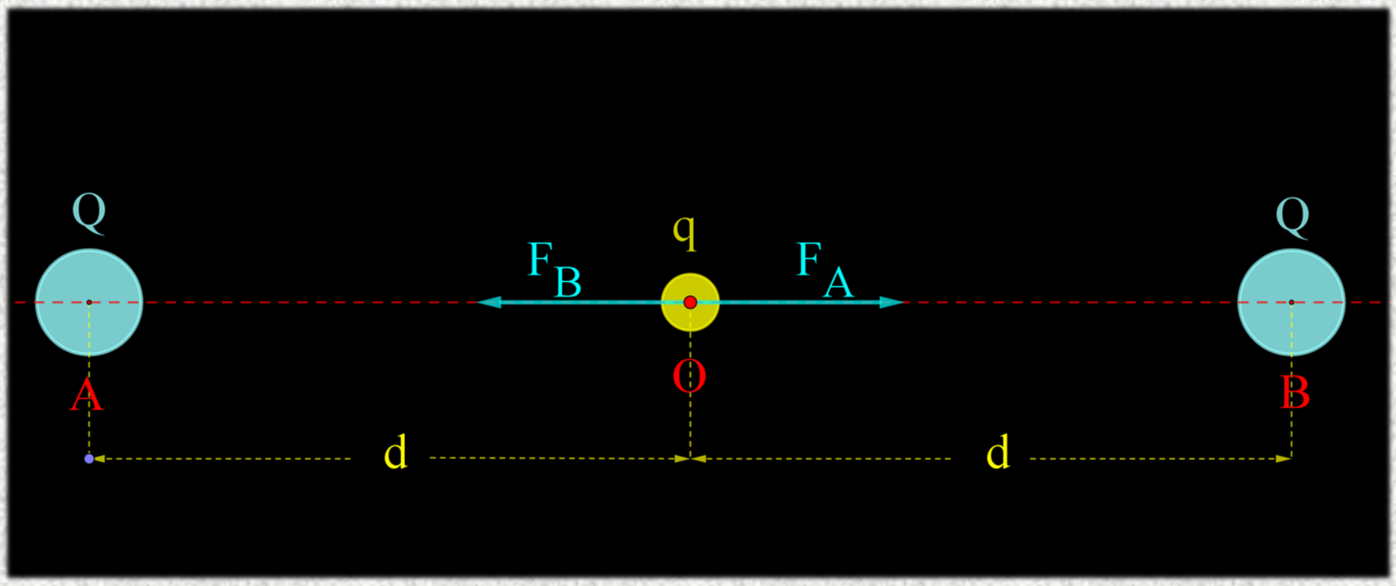
Η Εκφώνηση

Πάνω στον προσανατολισμένο άξονα (x΄O x) βρίσκονται σταθερά συνδεμένες δύο όμοιες φορτισμένες μπλε σφαίρες (A) και (B) με φορτίο (+Q) η κάθε μία.



Μια όμοια τρίτη φορτισμένη κίτρινη σφαίρα μπορεί να κινείται πάνω στον άξονα (x΄x) και μεταξύ των σημείων A και B χωρίς τριβές.
Την αφήνουμε ελεύθερη στην θέση $x = 0$ και η σφαίρα ισορροπεί.

Δίνονται τα φορτία (Q) και (q) των σφαιρών, η απόσταση (d) η σταθερά ($K_{ηλ}$).
Η ακτίνα κάθε σφαίρας είναι ($r \ll d$).

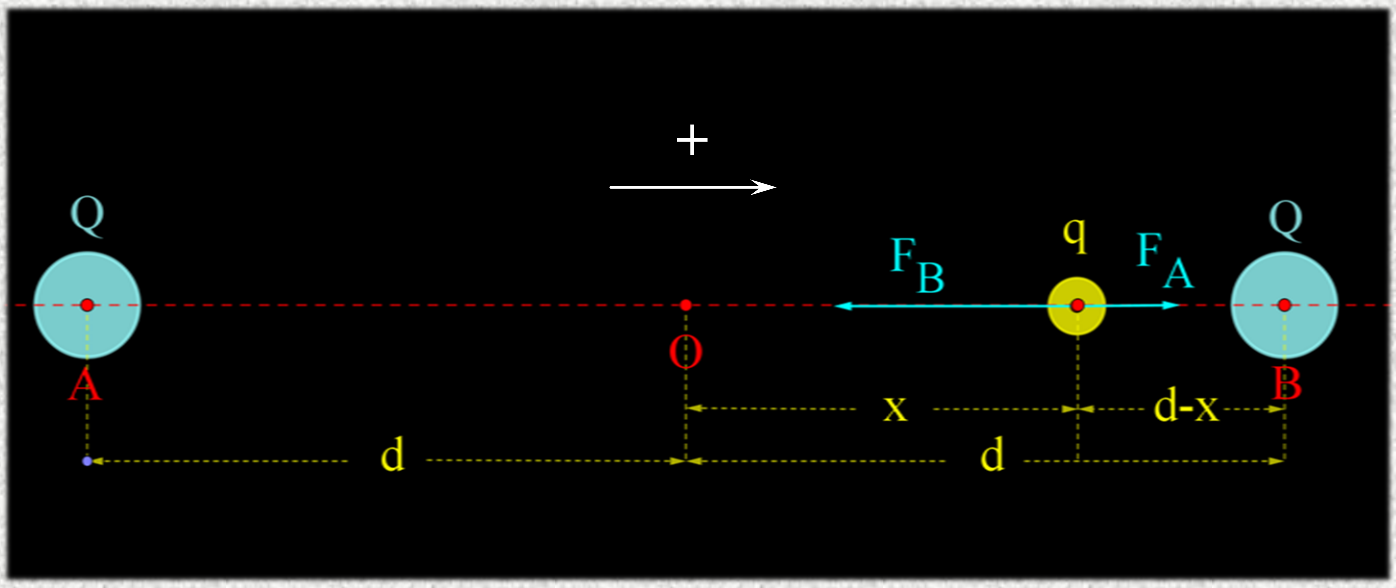


Ερώτημα 1ο : Ας ξεκινήσουμε με την ΣF

Εκτρέπουμε την κίτρινη σφαίρα από την θέση ισορροπίας της.
Να υπολογιστεί η συνισταμένη δύναμη που δέχεται η κίτρινη σφαίρα από τις δύο άλλες μπλε σφαίρες που βρίσκονται στα άκρα (A) και (B) σε συνάρτηση με την απομάκρυνση (x) από την θέση ισορροπίας της (O).

Απάντηση

Έστω μια τυχαία θέση της κίτρινης σφαίρας. Ο άξονας (x΄O x) είναι προσανατολισμένος. Θετική φορά θεωρώ προς τα δεξιά.



Η δύναμη που ασκεί η φορτισμένη μπλε σφαίρα που βρίσκεται στο (Α) στην κίτρινη σφαίρα είναι:

$$F_A = K_{ηλ}\frac{|Qq|}{(d+x)^2}$$

Η δύναμη που ασκεί η φορτισμένη μπλε σφαίρα που βρίσκεται στο (Β) στην κίτρινη σφαίρα είναι:

$$F_B = -K_{ηλ}\frac{|Qq|}{(d-x)^2}$$

Η συνισταμένη δύναμη (ΣF) που δέχεται η φορτισμένη κίτρινη σφαίρα είναι:

$$ΣF = F_A + F_B \rightarrow$$

$$ΣF = K_{ηλ}|Qq|\left\{\frac{1}{(d+x)^2} - \frac{1}{(d-x)^2}\right\} \rightarrow$$

$$ΣF = K_{ηλ}|Qq|\left\{\frac{(d-x)^2-(d+x)^2}{(d-x)^2(d+x)^2}\right\} \rightarrow$$

$$ΣF = K_{ηλ}|Qq|\left\{\frac{-4dx}{\left(d^2-x^2\right)^2}\right\} \rightarrow$$

$$ΣF = -4K_{ηλ}\,|Qq|\,d\,\frac{x}{\left(d^2-x^2\right)^2}$$

$$-d < x < +d$$

Ερώτημα 2ο : Μια ενδιαφέρουσα γραφική παράσταση

Να γίνει η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης (ΣF) σε συνάρτηση με την απομάκρυνση (x) από την θέση ισορροπίας της κίτρινης φορτισμένης σφαίρας.

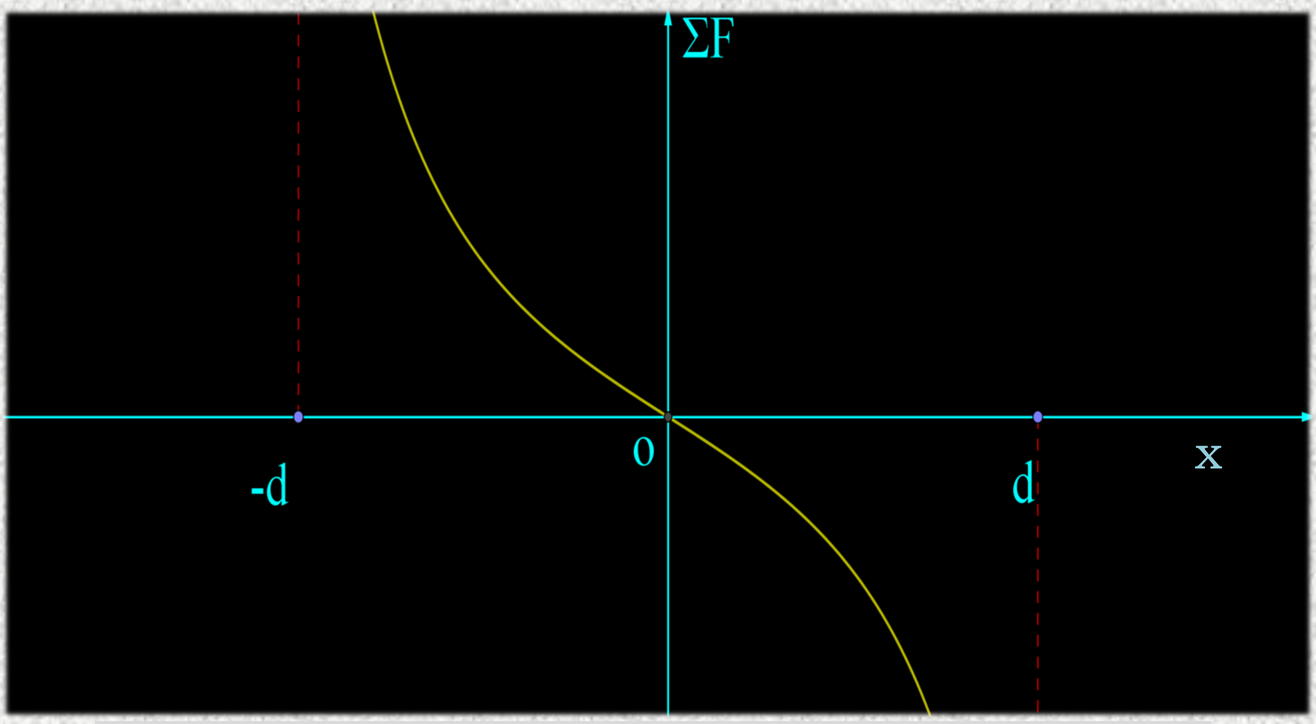
Απάντηση

Η σχέση που συνδέει την συνισταμένη δύναμη (ΣF) με την απομάκρυνση (x) είναι :

$$ΣF = -4K_{ηλ}\,|Qq|\,d\,\frac{x}{\left(d^2-x^2\right)^2}$$

Προσοχή στο πεδίο τιμών : $-d < x < +d$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνισταμένης δύναμης (ΣF) σε συνάρτηση με την απομάκρυνση (x) από την θέση ισορροπίας της κίτρινης σφαίρας και στο καθορισμένο πεδίο τιμών.



!!! Παρατηρήστε την απόλυτη συμμετρία της γραφικής παράστασης ως προς την αρχή των αξόνων (Ο) που ταυτίζεται με την θέση ισορροπίας.

Ερώτημα 3ο : Η υποψία … !!!!

Να μελετηθεί η κίνηση της κίτρινης σφαίρας μεταξύ των θέσεων :

$$-d < x < +d$$

Απάντηση

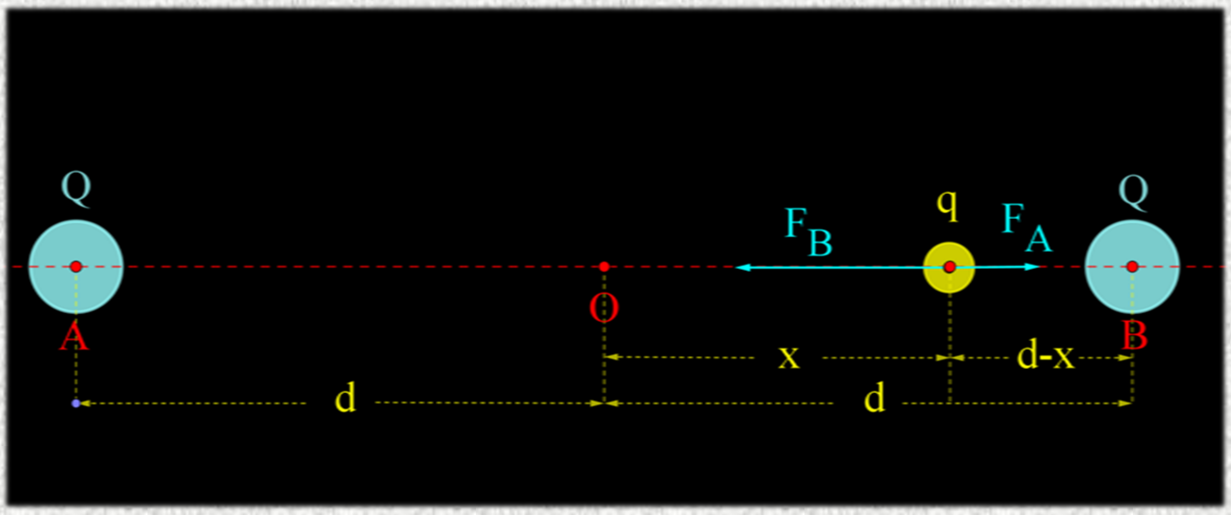
Μελετώντας την γραφική παράσταση της (ΣF – x) παίρνουμε τρεις σημαντικές πληροφορίες.

Πληροφορία 1η

Υπάρχει μια θέση της κίτρινης σφαίρας η θέση (x = 0) που η συνισταμένη δύναμη είναι (ΣF = 0).
Η θέση αυτή είναι θέση ευσταθούς ισορροπίας.
Δηλαδή θέση ελάχιστης δυναμικής ενέργειας.

Ας το δείξουμε.

Παίρνω μια τυχαία θέση της κίτρινης σφαίρας όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η δυναμική ενέργεια της κίτρινης σφαίρας με την σφαίρα (Α) είναι :

$$U_A = K_{\eta\lambda}\frac{Qq}{d+x}$$

Η δυναμική ενέργεια της κίτρινης σφαίρας με την σφαίρα (Β) είναι :

$$U_B = K_{\eta\lambda}\frac{Qq}{d-x}$$

Η δυναμική ενέργεια της κίτρινης σφαίρας με τις σφαίρες (Α) και (Β) είναι:

$$U_\Sigma = K_{\eta\lambda}\frac{Qq}{d+x} + K_{\eta\lambda}\frac{Qq}{d-x} \quad \rightarrow \quad U_\Sigma = K_{\eta\lambda}Qq\left(\frac{1}{d+x}+\frac{1}{d-x}\right)$$

$$U_\Sigma = K_{\eta\lambda}Qq\left(\frac{2d}{d^2-x^2}\right) \rightarrow U_\Sigma = 2K_{\eta\lambda}Qqd\left(\frac{1}{d^2-x^2}\right) \rightarrow$$

$$U_\Sigma = \frac{2K_{\eta\lambda}Qqd}{d^2-x^2}$$

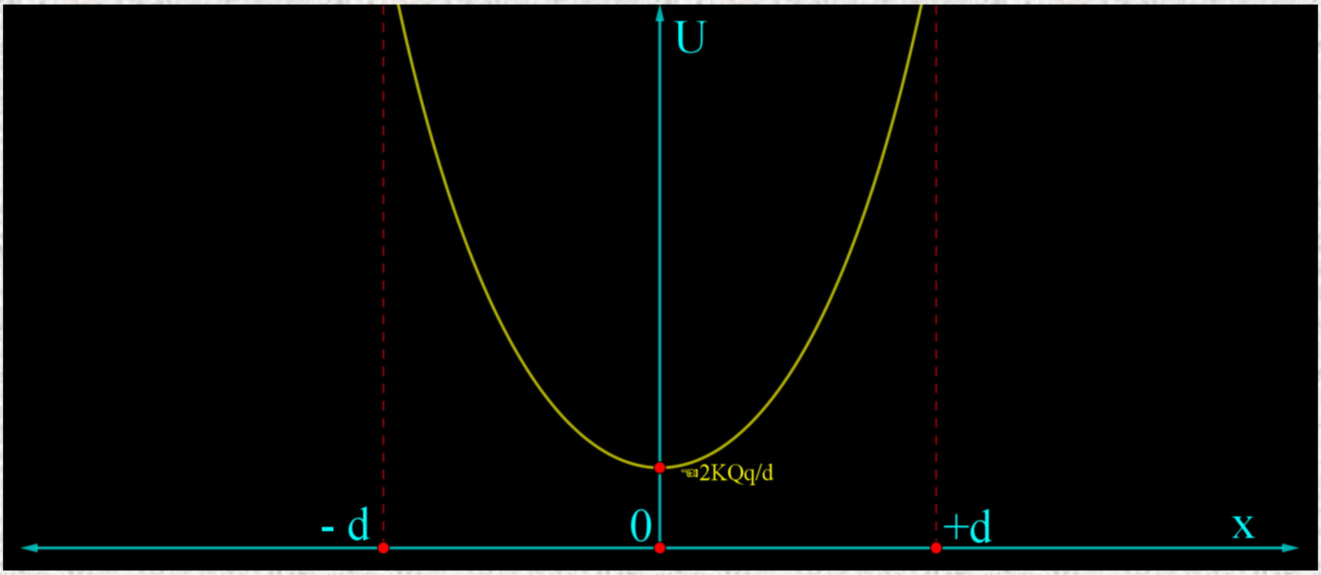
$$-d < x < +d$$

Στην θέση $x = 0$ δυναμική ενέργεια της κίτρινης σφαίρας με τις σφαίρες (Α) και (Β) είναι:

$$U_{\Sigma,min} = \frac{2K_{\eta\lambda}\,Qq}{d}\ .$$

Στην θέση αυτή έχουμε την ελάχιστη δυναμική ενέργεια.
Έτσι η θέση (Ο) είναι η μοναδική θέση ευσταθούς ισορροπίας
κατά την κίνηση της κίτρινης σφαίρας.

Το παρακάτω διάγραμμα $(U_\Sigma - x)$ επιβεβαιώνεται η πληροφορία.



Πληροφορία 2η

Η συνισταμένη δύναμη έχει σε κάθε θέση αντίθετη κατεύθυνση με απομάκρυνση (x) και πάντα προς την θέση ισορροπίας.

Άρα η συνισταμένη δύναμη

$$\Sigma F = -4K_{\eta\lambda}\,|Qq|\,d\,\frac{x}{\left(d^2 - x^2\right)^2}$$

$$-d < x < +d$$

Είναι : Δύναμη Επαναφοράς της κίτρινης σφαίρας στην θέση ισορροπίας.

Πληροφορία 3η

Οι μοναδικές δυνάμεις (F_A) και (F_B) που ασκούνται στην κίτρινη σφαίρα είναι δυνάμεις Coulomb άρα είναι διατηρητικές (συντηρητικές).
Συνεπώς η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

Αυτό σημαίνει ότι :
Η ενέργεια που προσφέρομαι στο σύστημα ($E_{\pi\rho}$) για την απομάκρυνση της κίτρινης χάντρας από την θέση ισορροπίας θα παραμένει στο σύστημα αμετάβλητη. Χωρίς απώλειες.
Αλλά με διαρκείς μετατροπές της δυναμικής σε κινητική ενέργεια και αντίστροφα.

Δηλαδή κάθε στιγμή θα ισχύει ότι : $E_{\pi\rho} = K + U$

Ας αξιολογήσουμε τώρα τις πληροφορίες τις τρείς πληροφορίες.

1. Η κίτρινη σφαίρα έχει μια μοναδική και σταθερή θέση ισορροπίας.

2. Στην κίτρινη σφαίρα ασκείται μια συνισταμένη δύναμη με κατεύθυνση πάντα προς θέση ισορροπίας . Είναι δηλαδή μια δύναμη επαναφοράς.

3. Μια σταθερή μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται διαρκώς από δυναμική σε κινητική και αντίστροφα.

Συμπέρασμα

Η κίτρινη σφαίρα εκτελεί μια Αμείωτη Ταλάντωση.

Και η Υποψία … γίνεται Σιγουριά.

Ερώτημα 4ο : ''Κάτι''… όμορφο και παράξενο.

Απομακρύνουμε την κίτρινη σφαίρα από την θέση ισορροπίας στη θέση ($x = A$) με (A) πολύ μικρότερο της απόστασης d ($A \ll d$)
και την αφήνουμε ελεύθερη.
Να μελετηθεί η κίνηση της κίτρινης σφαίρας.

Απάντηση

Δείξαμε παραπάνω ότι η συνισταμένη των δυνάμεων στην κίτρινη σφαίρα είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F = -\,4K_{\eta\lambda}\,|Qq|\,d\,\dfrac{x}{(d^2-x^2)^2} \\ \text{Τώρα το πεδίο τιμών θα είναι:} \quad -A \le x \le +A \end{array}\right\}$$

Όμως το ($d >> x$) άρα το $d^2 - x^2 \cong d^2$.

Η συνισταμένη των δυνάμεων στην κίτρινη σφαίρα θα γίνει :

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F = -\,4K_{\eta\lambda}\,|Qq|\,d\,\dfrac{x}{d^4} \\ -A \le x \le +A \end{array}\right\}$$

Τελικά:

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma F = -\dfrac{4K_{\eta\lambda}|Qq|}{d^3}\,x \\[2ex] -A \le x \le +A \end{array}\right\}$$

Και να που φτάσαμε τώρα.

Αν θέσουμε $D = \dfrac{4K_{\eta\lambda}\,|Qq|}{d^3}$ τότε η συνισταμένη των δυνάμεων :

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma F = -D\,x \\[2ex] -A \le x \le +A \end{array}\right\}$$

Άρα για τιμές του (x) στην περιοχή

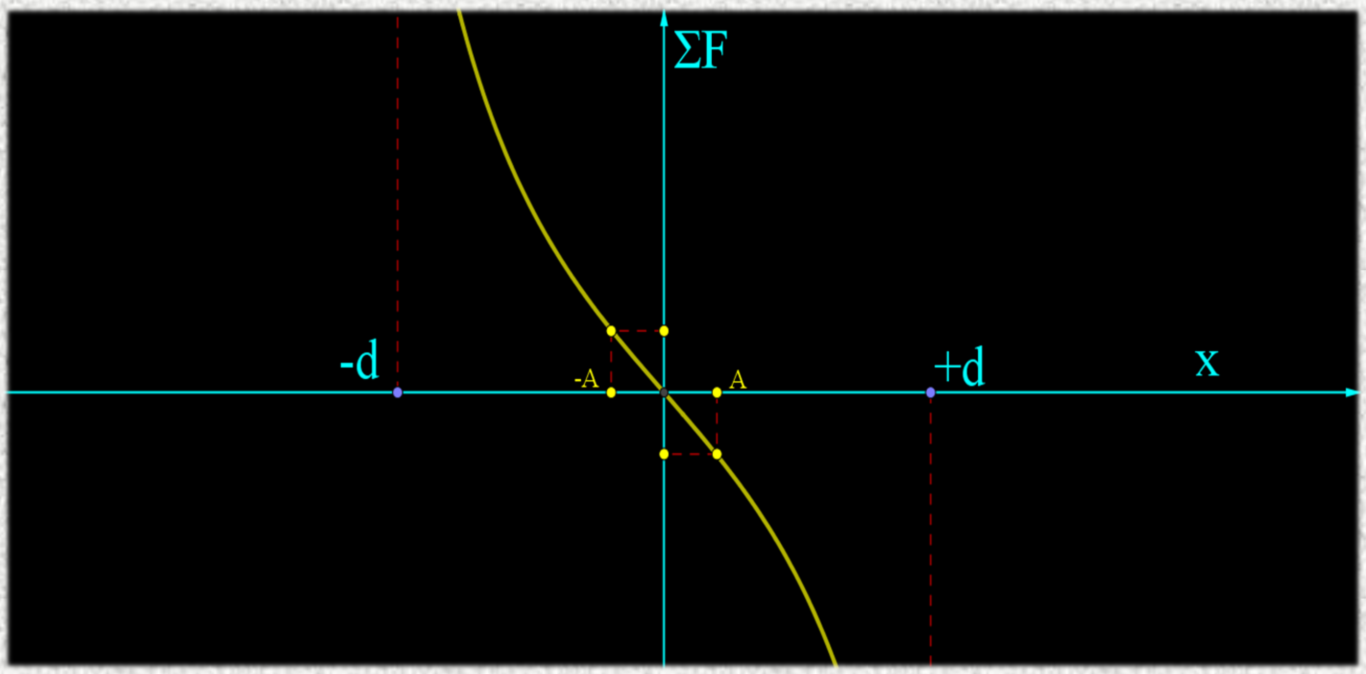
$-A \le x \le +A$

και με (A) πολύ μικρότερο του (d) ($A \ll d$)

η κίνηση θα είναι απλή αρμονική ταλάντωση (α.α.τ)

με σταθερά επαναφοράς : $D = \dfrac{4K_{\eta\lambda}|Qq|}{d^3}$

Ας το δούμε όμως πως προκύπτει και με την μελέτη της γραφικής παράστασης $(\Sigma F - x)$.

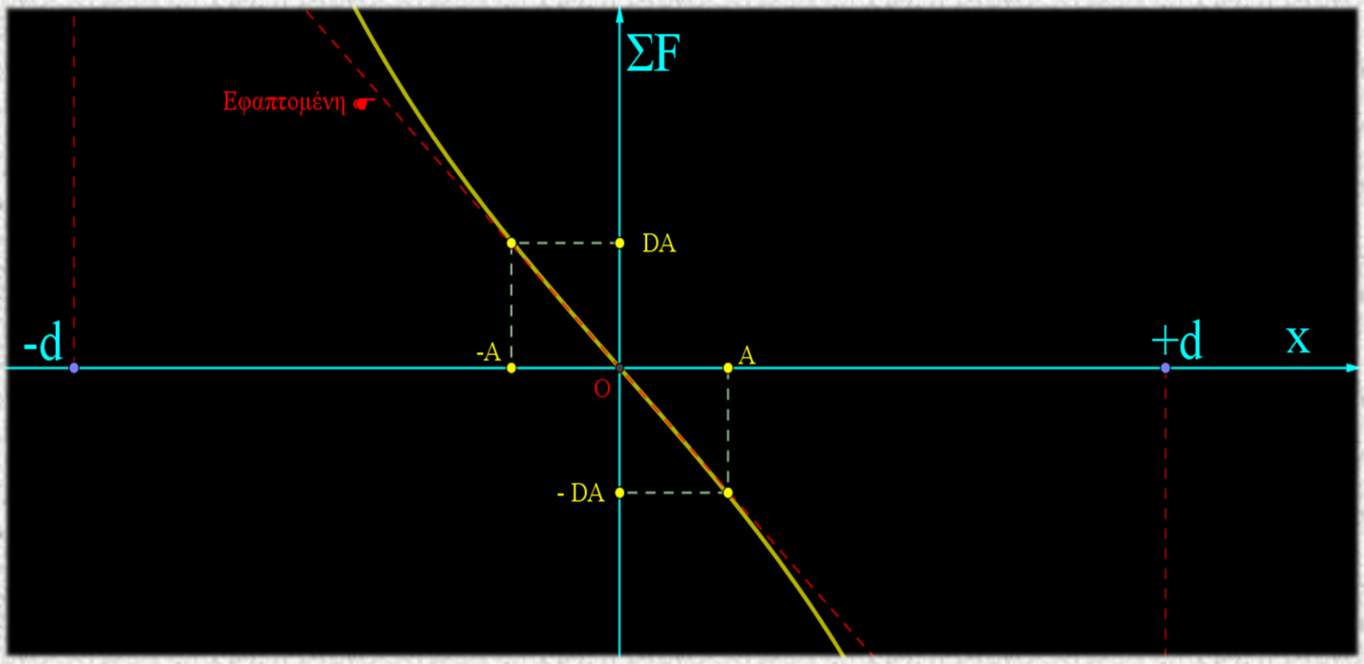


Ας απομονώσουμε στο παραπάνω διάγραμμα μια πολύ μικρή περιοχή τιμών για την θέση (x)

$$-A \leq x \leq +A$$

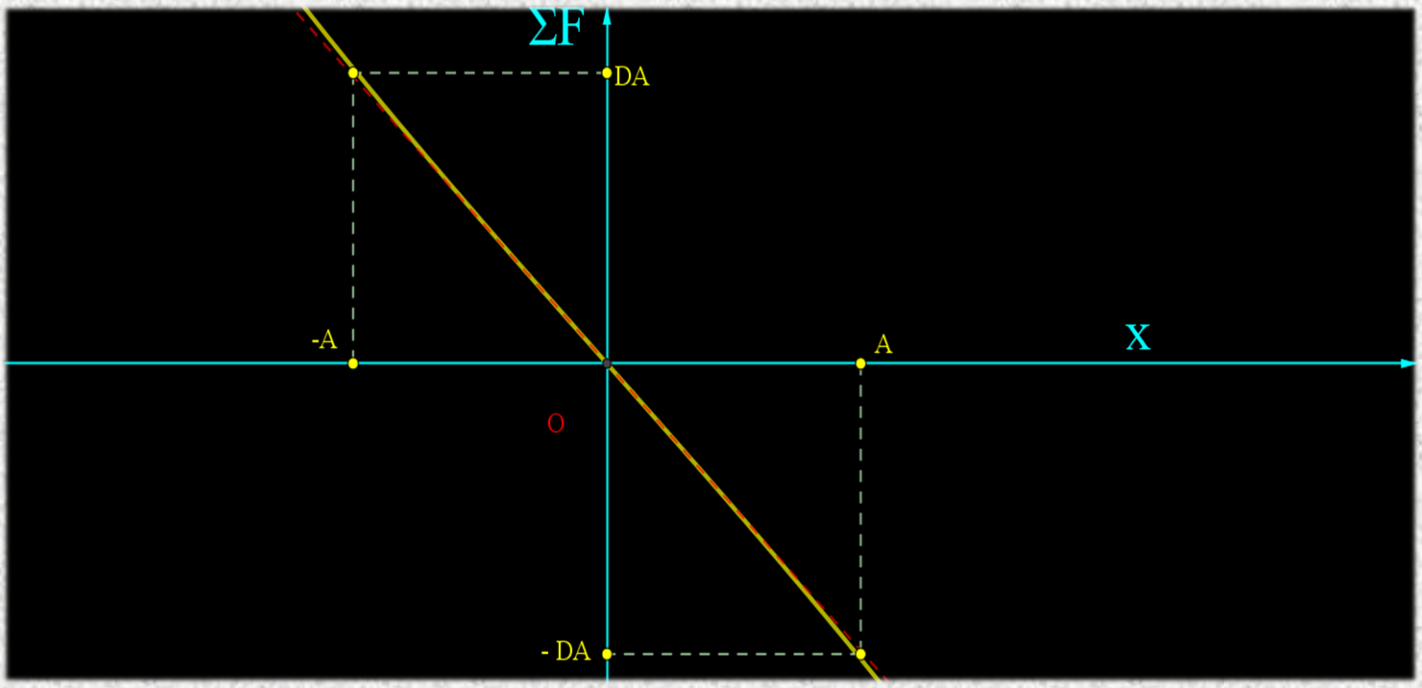
Στην συνέχεια ας προσπαθήσουμε να μεγεθύνουμε την περιοχή που επιλέξαμε.

Αν φέρουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο (Ο) θα έχουμε … μια ευχάριστη έκπληξη.



Στην περιοχή που επιλέξαμε
η εφαπτομένη της καμπύλης σχεδόν συμπίπτει
με το τμήμα της γραφικής παράστασης στην περιοχή

$$-A \leq x \leq +A$$



Δηλαδή η μορφή της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στην κίτρινη φορτισμένη σφαίρα στην παραπάνω περιοχή έχει την μορφή:

$$\Sigma F = -D\,x$$

$$-A \le x \le +A$$

Άρα η κίνηση στην περιοχή αυτή προσεγγίζει με πολύ μεγάλη ακρίβεια

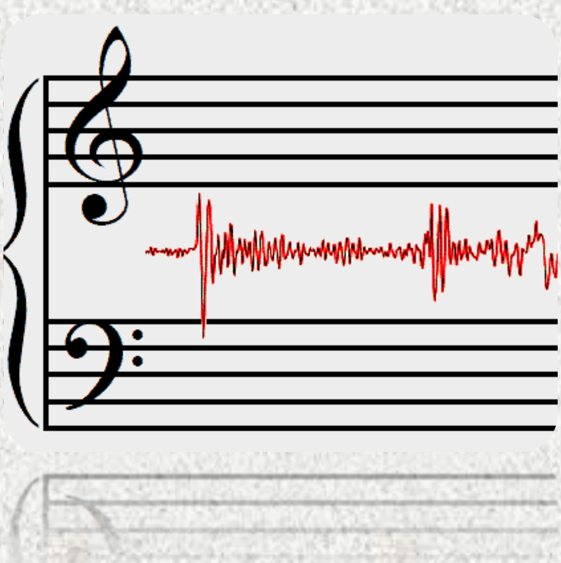
την απλή αρμονική ταλάντωση.

Ο Επίλογος

Και να που φτάσαμε … ως εδώ.
Σε μια όμορφη και παράξενη κίνηση.

Μια σύνθετη αμείωτη ταλάντωση
να μετατρέπεται
σε απλή αρμονική ταλάντωση κίνηση
σε μια μικρή περιοχή τιμών γύρω από την θέση ισορροπίας.

"Κάτι" σαν ένα απλό μαθηματικό εκκρεμές.



Το Όμορφο και το Παράξενο … σφιχτά Αγκαλιασμένα.

Υ.Γ. Προσπάθησα την μαθηματική λύση της διαφορικής εξίσωσης που μας δίνει την κίνηση της κίτρινης φορτισμένης σφαίρας. Η προσπάθεια … συνεχίζεται.

Γιάννης Δογραματζάκης
Φυσικός