Μια άσκηση …Ένα μάθημα
για την κατανόηση των κυμάτων

Η εκφώνηση

Γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους συμπίπτει με τον άξονα x΄Ο x. Η στοιχειώδης μάζα (Δm) που βρίσκεται στην θέση (x = 0) αρχίζει την στιγμή (t = 0) να εκτελεί εγκάρσια αρμονική ταλάντωση με εξίσωση

$$y = 0.04\eta\mu(10\pi t) \quad \text{(S.I).}$$

Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο γραμμικό ελαστικό μέσο είναι υ = 10 m/s.Στο μέσο δεν έχω απώλειες ενέργειας.

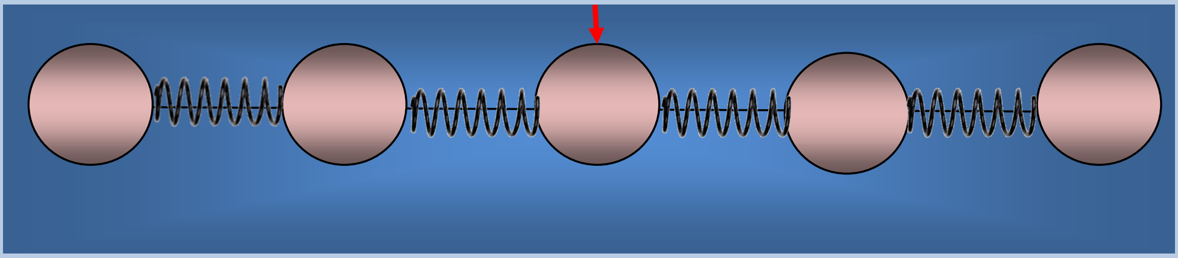
Πρόταση 1η

Να γίνει η περιγραφή διάδοσης της αρμονικής διαταραχής στο γραμμικό ελαστικό μέσο μεγάλου μήκους.

Απάντηση

Η στοιχειώδης μάζα (Δm) του γραμμικού ελαστικού μέσου που βρίσκεται στην θέση (x = 0) συνδέεται με δυνάμεις ελαστικότητας με τους δομικούς λίθους του ελαστικού μέσου.

Μάζα (Δm) – ‘Πηγή’



Όταν αρχίζει να εκτελεί αρμονική ταλάντωση λόγω της ύπαρξης των δυνάμεων ελαστικότητας οι δομικοί λίθοι του γραμμικού ελαστικού μέσου εξαναγκάζονται να ακολουθήσουν την κίνηση.
Όλη η διάδοση της κίνησης είναι ένας εξαναγκασμός.
Ένας ‘καλά’ στημένος μηχανισμός εξαναγκασμένων ταλαντώσεων.
Τον ρόλο του διεγέρτη τον ‘παίζει’ η στοιχειώδης μάζα (Δm) – πηγή .
Οι άμεσα συνδεμένοι δομικοί λίθοι του γραμμικού ελαστικού μέσου είναι τα ταλαντούμενα συστήματα.

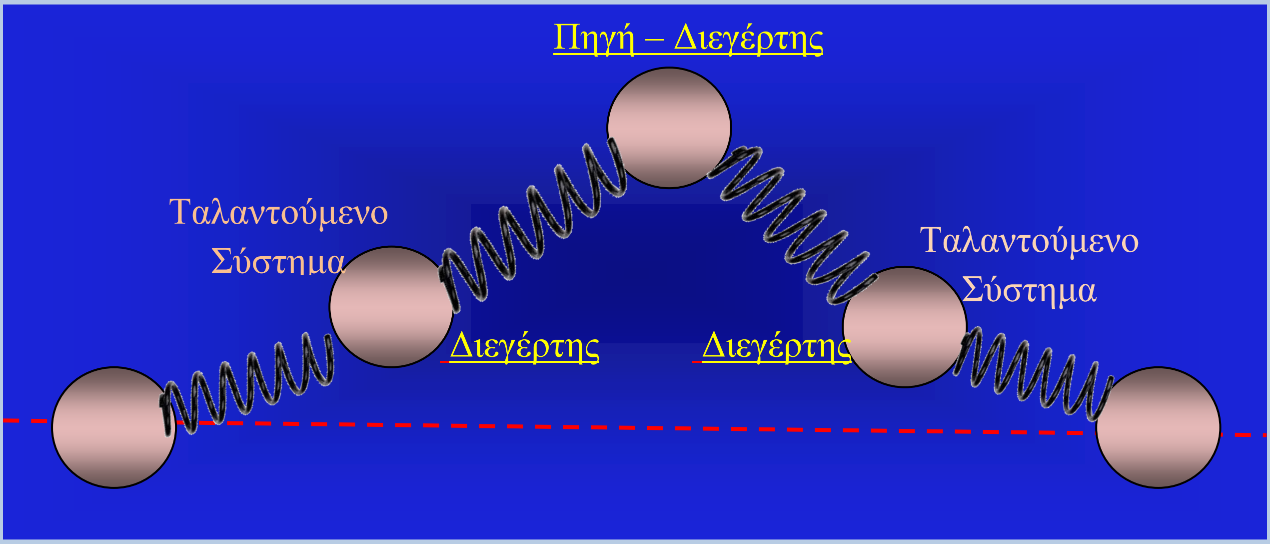
Η στοιχειώδης μάζα (Δm) – διεγέρτης επιβάλλει την αρμονική κίνηση αλλά και την συχνότητα της , στους δομικούς λίθους του γραμμικού ελαστικού μέσου που είναι συνδεμένη.
Στην συνέχεια οι δομικοί λίθοι - ταλαντούμενα συστήματα παίζουν ρόλο του διεγέρτη για τους επόμενους κ.ο.κ.

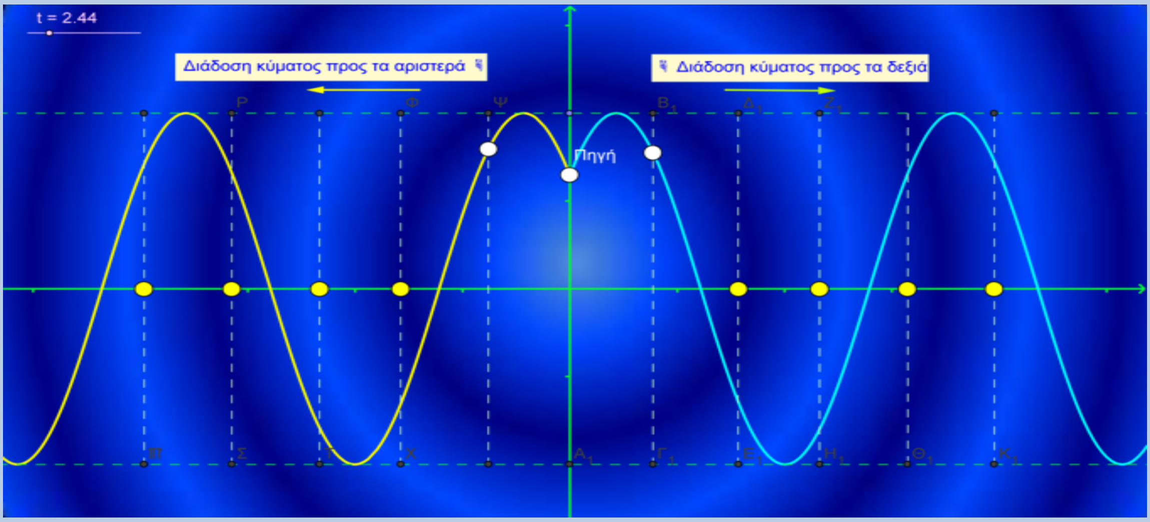
Έτσι ένας δομικός λίθος παίζει ταυτόχρονα διπλό ρόλο :

α. Ταλαντούμενου συστήματος

β. Διεγέρτη.

Ο μηχανισμός αυτός μεταφέρει την ενέργεια και την ορμή χωρίς να γίνεται μεταφορά μάζας.





Το διάγραμμα μας δίνει τα μοντέλα των κυματικών εικόνων που δημιουργούνται από την εγκάρσια αρμονική ταλάντωση της μάζας (Δm) – πηγή.

Σχόλιο : Αν δούμε τον μηχανισμό διάδοσης ενός κύματος σαν σύνολο διαδοχικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων τότε εύκολα αιτιολογούμε γιατί η συχνότητα διάδοσης του κύματος μένει σταθερή. Ανεξάρτητα από το μέσο διάδοσης. Αυτό βέβαια είναι ένα Μοντέλο.

Πρόταση 2η

Να βρεθούν οι εξισώσεις που μας δίνουν την διάδοση των αρμονικών κυματικών διαταραχών :

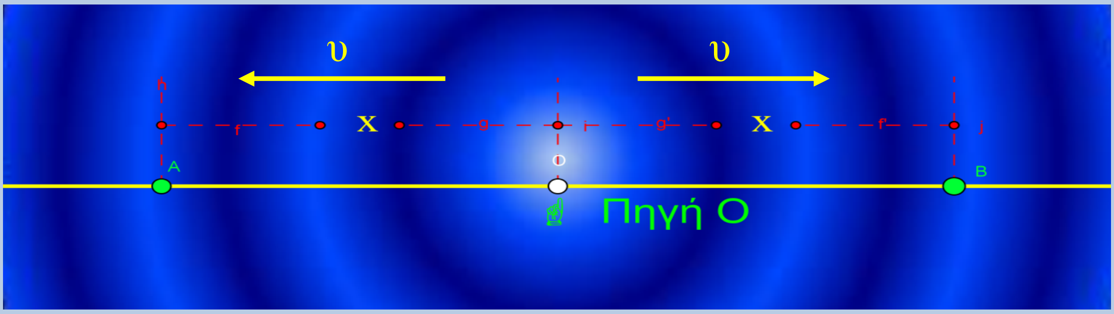
α. Προς τα δεξιά της πηγής

β. Προς τα αριστερά της πηγής.

Τι συμπέρασμα μπορεί να βγει;

Απάντηση

1.Στον θετικό ημιάξονα το κύμα διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά.



Ο χρόνος που χρειάζεται να φτάσει το μέτωπο του κύματος από το (Ο) στο τυχαίο σημείο (Β) είναι:

$t_B = \frac{\chi}{\upsilon}$ όπου $\chi \geq 0$ άρα μπορώ να γράψω $t_B = \frac{|\chi|}{\upsilon}$

Για χρόνους :

α. $t < t_B = \frac{|\chi|}{\upsilon}$ το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο Β.

β. $t = t_B = \frac{|\chi|}{\upsilon}$ το κύμα μόλις φτάνει στο Β.

γ. $t > t_B = \frac{|\chi|}{\upsilon}$ το κύμα έχει φτάσει στο Β

και θα έχει ταλαντωθεί για χρόνο $t' = t - \frac{|\chi|}{\upsilon}$.

Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής είναι της μορφής :

$$y_0 = A\eta\mu(\omega t)$$

Άρα και του τυχαίου σημείου (Β) είναι

$y = A\eta\mu(\omega t') \rightarrow y = A\eta\mu\left(\omega(t - \frac{|\chi|}{\upsilon})\right) \rightarrow y = A\eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{|\chi|}{\lambda})$

Από την εξίσωση ταλάντωσης της πηγής $y = 0.04\eta\mu(10\pi t)$ (S.I) προκύπτει ότι :

$A = 0.04m$, $\omega = 10\pi\frac{r}{s}$, Τ $= \frac{1}{5}\ s$, f = 5Hz , υ = 10 $\frac{m}{s}$, $\lambda = 2m$.

Η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται δεξιά είναι :

$$y = 0.04\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{|\chi|}{2}\right) \quad \text{(S.I).}$$

2.Στον αρνητικό ημιάξονα το κύμα διαδίδεται από δεξιά προς αριστερά

Επειδή το $\chi \leq 0$ πρέπει να γράψω $t_A = \frac{|\chi|}{\upsilon}$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύω ότι η εξίσωση του κύματος που διαδίδεται αριστερά είναι:

$$y = 0.04\eta\mu 2\pi\left(5t - \frac{|\chi|}{2}\right) \quad \text{(S.I).}$$

<u>Συμπέρασμα</u>: Στην παραπάνω περίπτωση η πηγή ταυτίζεται με την θέση αναφοράς (χ = 0) . Όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου περιγράφονται με την ίδια κυματική εξίσωση.

<u>Σχόλιο</u> : Εδώ μπορούμε να προκαλέσουμε μια συζήτηση με τους μαθητές μας .
Η άποψη του σχολικού βιβλίου έτσι που διατυπώνεται…για διαφορετικής μορφής εξίσωση κύματος ανάλογα με την φορά διάδοσης μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση.

Πρόταση 3η
Να γίνει η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την θέση των σημείων φ = φ(χ) την στιγμή $t = \frac{11T}{12}$ όπου T η περίοδος του κύματος.

Απάντηση

Η φάση του κύματος είναι : $\varphi = 2\pi\left(5t - \frac{|\chi|}{2}\right)$

αν την επεξεργαστούμε λίγο θα προκύψει : $\varphi = 10\pi t - \pi|\chi|$

και αν αντικαταστήσω την χρονική στιγμή

$t = \frac{11T}{12} \rightarrow \ t = \frac{11}{60}\ s$ η εξίσωση της φάσης με την θέση θα είναι:

$$\varphi = \frac{11\pi}{6} - \pi|\chi|$$

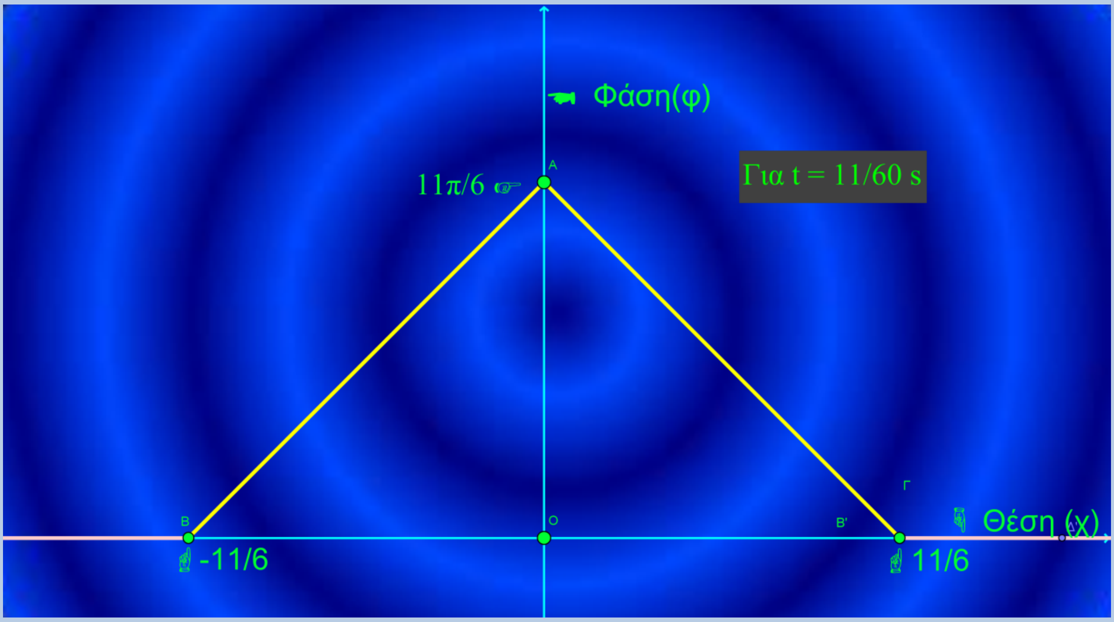
Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης προκύπτει ως εξής :

α. Για χ = 0 τότε φ = 11π/6 rad

β. Για $t = \frac{11}{60}\ s$ το κύμα φτάνει στις θέσεις χ = ± 11/6 m

όπου η φάση μηδενίζεται (φ = 0).

Είναι ευθεία και φθίνουσα.



Το παραπάνω διάγραμμα μας δίνει τις φάσεις με την θέση την δεδομένη χρονική στιγμή.

Σχόλιο: Στους μαθητές μου προτείνω να μην μηδενίζουν πάντα την φάση για να βρουν την θέση του μετώπου του κύματος την δεδομένη στιγμή(t). Αν η αρχική φάση της πηγής είναι μηδέν δεν παρουσιάζεται πρόβλημα. Αν είναι όμως (π) τότε τους προτείνω να βρίσκουν την θέση ($\chi = \upsilon\, t$) του μετώπου και από εκεί να προσδιορίζουν την τελική τιμή της φάσης .

Πρόταση 4η

Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος την χρονική στιγμή

$$t = \frac{11T}{12}$$

Απάντηση

Την χρονική στιγμή $t = \frac{11T}{12}$ εξίσωση που δίνει το στιγμιότυπο του κύματος είναι :

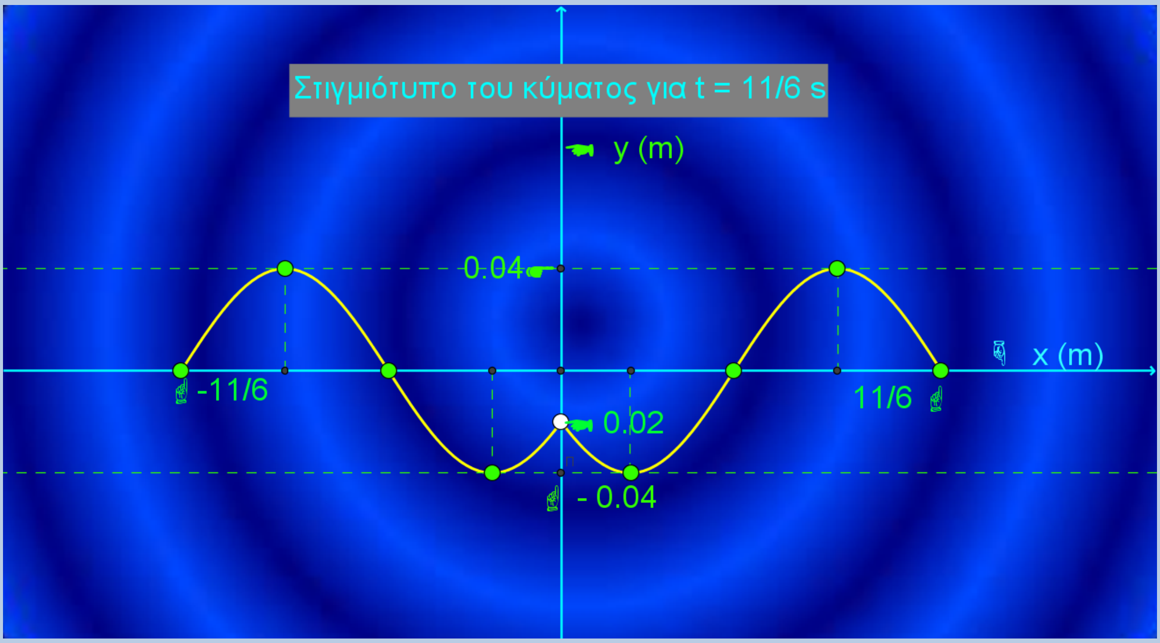
$$y = 0.04\eta\mu\left(\frac{11\pi}{6} - \pi|\chi|\right) \quad \text{(S.I)}$$

Το μέτωπο του κύματος βρίσκεται στις θέσεις : $\chi = \pm\ 11/6$ m

που αντιστοιχούν σε $\chi = \pm(3\frac{\lambda}{4} + \frac{2}{3}\frac{\lambda}{4})$.

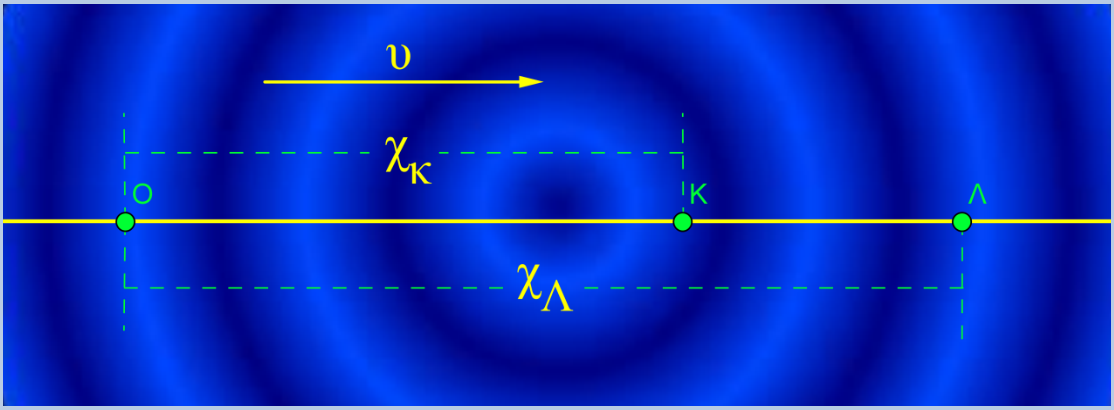
Ακόμα για $\chi = 0$ το $y = 0.02m$.

Το στιγμιότυπο που προκύπτει είναι παρακάτω.



Πρόταση 5η
Να γίνει η γραφική παράσταση της διαφοράς φάσης μεταξύ δύο σημείων (Κ) και (Λ) του κύματος που βρίσκονται στις θέσεις $\chi_K = 10\ m$ και $\chi_\Lambda = 15\ m$ σε συνάρτηση με τον χρόνο (t).

Απάντηση



Ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα να φτάσει από το (Ο) στο (Κ) είναι:

$t_K = \frac{\chi_K}{\upsilon} \rightarrow t_K = 1\ s$.

Από το (Ο) στο (Λ) είναι:

$t_\Lambda = \frac{\chi_\Lambda}{\upsilon} \rightarrow t_\Lambda = 1.5\ s$

Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων (Κ) και (Λ) θα είναι

$\varphi_{K\Lambda} = \varphi_K - \varphi_\Lambda$

α. Από 0 – 1ς : Το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο (Κ) και στο (Λ) άρα $\varphi_{K\Lambda} = 0$.

β. Από 1ς – 1.5 ς : Το κύμα έχει φτάσει μόνο στο Κ

$\varphi_{K\Lambda} = \varphi_K \rightarrow \varphi_K = 10\pi t - \pi|\chi_K| \rightarrow \varphi_K = 10\pi t - 10\pi$

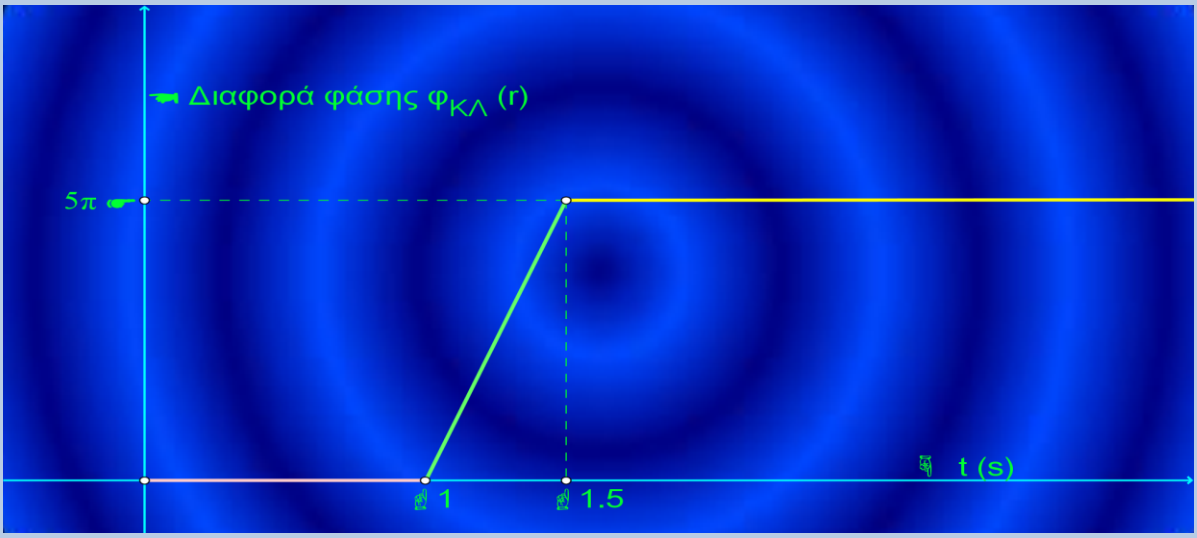
Για $t = 1s$ η $\varphi_{K\Lambda} = 0$

ενώ για $t = 1.5s$ η τιμή της $\varphi_{K\Lambda} = 5\pi\ rad$

γ. Από $t \geq 1.5s$ Το κύμα έχει φτάσει στο (Κ) και στο (Λ) διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων θα είναι σταθερή και ίση με :

$\varphi_{K\Lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}\chi_{K\Lambda}$ άρα $\varphi_{K\Lambda} = 5\pi\ rad$

Το διάγραμμα που προκύπτει τελικά είναι παρακάτω.



Δυο λόγια για το τέλος

Η ιδέα για την παραπάνω εργασία προέκυψε από την ανάγκη να δώσω μια όσο το δυνατό κατανοητή διδακτική πρόταση πάνω στην διάδοση των κυμάτων.
Επέλεξα το Μοντέλο της εξαναγκασμένης ταλάντωσης αλλά και την λύση αυτής της άσκησης με την εκτίμηση ότι θα βοηθήσει στην κατανόηση από τον μαθητή …όσο είναι δυνατόν

στην Φυσική …των Κυμάτων.

Αυτό εσείς θα το κρίνετε.

Στο Υ.Φ.Χ. γίνεται μια σημαντική συζήτηση στα Κύματα.
Σημαντικές αναρτήσεις.
Σημαντικές ιδέες.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω
τους συναδέλφους για τις ιδέες που μοιράζονται μαζί μου.

Γιάννης Δογραματζάκης