

## Μια άσκηση - διδασκαλία της Ορμής και της Α.Δ.Ο.

### Η εκφώνηση 1<sup>η</sup>

Δύο όμοια σώματα Α και Β ίδιας μάζας ( m ) κινούνται πάνω σε οριζόντιο λείο επίπεδο.

Η διεύθυνση της κίνησης τους συμπίπτει με τον άξονα ( χ'Οχ ).

### Πρόταση 1<sup>η</sup> - Η συνάντηση

Οι εξισώσεις που δίνουν τις θέσεις των σωμάτων με τον χρόνο είναι

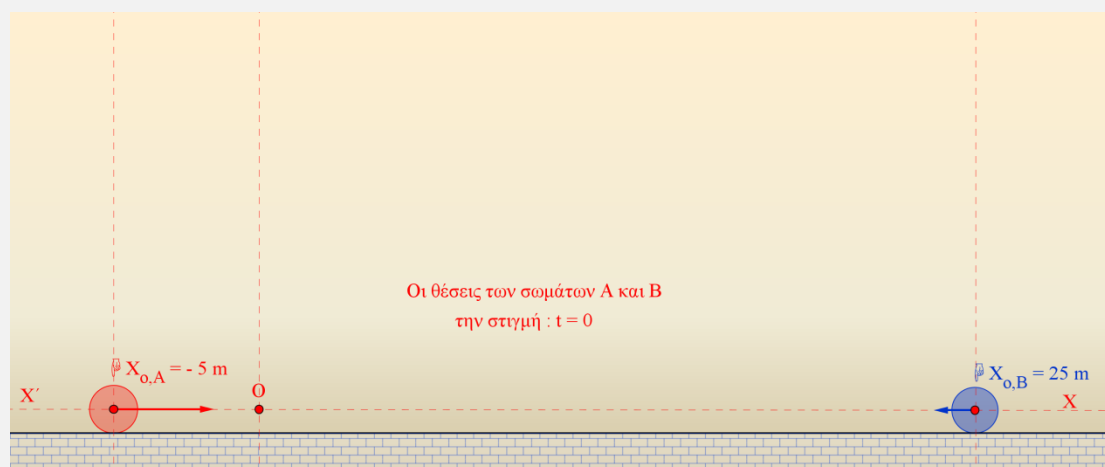
$$\left. \begin{array}{l} \text{Σώμα Α : } x_A = -5 + 3t + t^2 \\ \text{Σώμα Β : } x_B = 25 - t - t^2 \end{array} \right\} \text{(S.I)}$$

Να δείξουμε ότι τα σώματα θα συγκρουστούν.

Να προσδιοριστεί η χρονική στιγμή της κρούσης και η θέση που θα γίνει.

Να δειχθεί σε διάγραμμα θέσης ( x ) - χρόνου ( t ) το φαινόμενο.

### Απάντηση 1<sup>η</sup>



Για να δείξουμε ότι θα συγκρουστούν αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει χρονική στιγμή που τα σώματα θα βρίσκονται στην ίδια θέση.

Έστω ( $t$ ) η χρονική στιγμή όπου :

$$x_A = x_B$$

$$-5 + 3t + t^2 = 25 - t - t^2 \rightarrow 2t^2 + 4t - 30 = 0$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης μας δίνει:

$$t_1 = 3s \quad \text{και} \quad t_2 = -5s$$

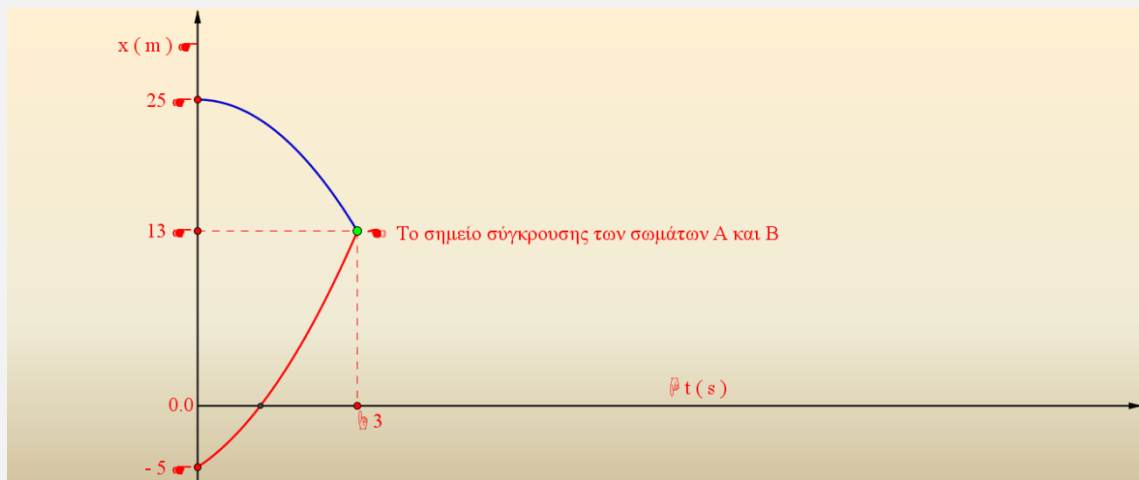
Δεκτή είναι η τιμή :  $t_1 = 3s$

Βρήκαμε ότι **υπάρχει η χρονική στιγμή**  
που τα σώματα θα βρεθούν **στην ίδια θέση**.

**Άρα και θα συγκρουστούν.**

Η θέση σύγκρουσης θα είναι:

$$x_A = -5 + 3 * 3 + 3^2 m \rightarrow x_A = x_B = 13m$$



### Πρόταση 2<sup>η</sup> - Οι ορμές

Να υπολογίσετε **τι εξισώσεις** που δίνουν τις ορμές των σωμάτων.

Δίνεται η ότι μάζα του σώματος είναι:  $m = 0.5Kgr$ .

Πόση είναι η ορμή κάθε σώματος την στιγμή της κρούσης.

## Απάντηση 2<sup>η</sup>

Πριν ξεκινήσουμε την απάντηση της πρότασης αξίζει να αναφερθούμε σε μερικές πολύ χρήσιμες έννοιες και σχέσεις της Α΄ Λυκείου.

### Ας θυμηθούμε

Οι εξισώσεις που δίνουν την μετατόπιση στις γνωστές μας κινήσεις είναι.

Στην ευθύγραμμη ομαλή:

$$\Delta x = v\Delta t \quad \text{αλλά} \quad \Delta x = x - x_0 \rightarrow$$

$$x = x_0 + v\Delta t$$

Στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad \text{αλλά} \quad \Delta x = x - x_0 \rightarrow$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Ας πάμε τώρα στις δευτεροβάθμιες εξισώσεις της εκφώνησης.

Με ποια από τις παραπάνω μπορούμε να τις αντιστοιχήσουμε;

Προφανώς με την δευτεροβάθμια

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Ας προχωρήσουμε.

Για το σώμα Α :

$$x_A = x_{0,A} + v_{0,A} t + \frac{1}{2} \alpha_A t^2$$

$$x_A = -5 + 3t + t^2$$

Με αντιστοίχιση έχω

$$x_{0,A} = -5\text{m} , v_{0,A} = 3\text{m/s} , \alpha_A = 2\text{m/s}^2$$

Η κίνηση που κάνει το σώμα Α είναι :

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κινούμενο προς την θετική φορά.

Η ταχύτητα του σώματος Α θα είναι:

$$v_A = v_{0,A} + \alpha_A t \rightarrow$$

$$v_A = 3 + 2t \text{ (S. I)}$$

Η εξίσωση που δίνει την ορμή του κάθε στιγμή είναι :

$$P_A = m v_A \rightarrow P_A = 1,5 + t \text{ (S. I)}$$

Την στιγμή  $t = 3s$  δηλαδή την στιγμή της κρούσης

$$v_A = 9 \text{ m/s} \quad \text{και η ορμή} \quad P_A = m v_A \rightarrow P_A = 4.5 \text{ m/s}$$

Για το σώμα B :

$$x_B = x_{0,B} + v_{0,B}t + \frac{1}{2} \alpha_B t^2$$

$$x_B = 25 - t - t^2$$

Με αντιστοίχιση έχω :

$$x_{0,B} = 25 \text{ m} , v_{0,B} = -1 \text{ m/s} , \alpha_B = -2 \text{ m/s}^2$$

Η κίνηση που κάνει το σώμα B είναι :

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κινούμενο προς την αρνητική φορά.

Η ταχύτητα του σώματος B θα είναι:

$$v_B = v_{0,B} + \alpha_B t$$

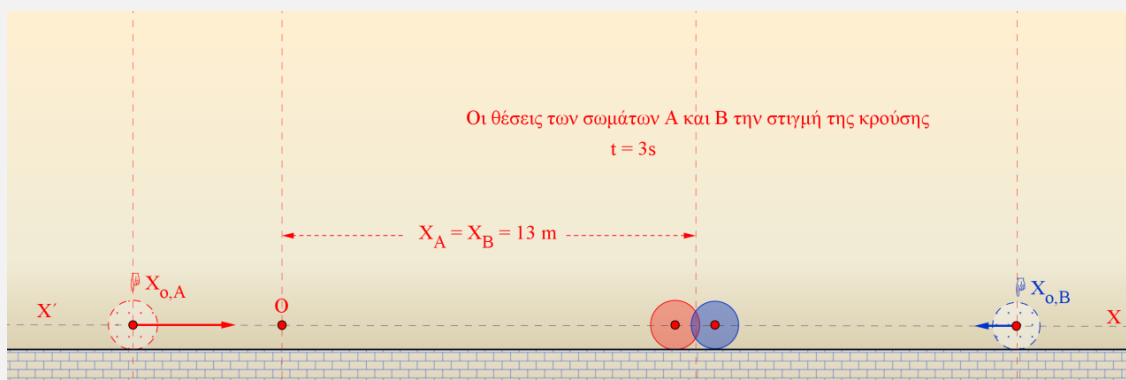
$$v_B = -1 - 2t \text{ (S. I)}$$

Η εξίσωση που δίνει την ορμή του κάθε στιγμή είναι :

$$P_B = m v_B \rightarrow P_B = -0,5 - t \text{ (S. I)}$$

Την στιγμή  $t = 3s$  δηλαδή την στιγμή της κρούσης

$$v_B = -7 \text{ m/s} \quad \text{και η ορμή} \quad P_B = m v_B \rightarrow P_B = -3.5 \text{ m/s}$$



### Σχόλιο

Πέρυσι η Γεωργία με ρώτησε :

- Κύριε έχω ένα πρόβλημα ...με την αντιστοίχιση.  
Πως μπορώ να την αιτιολογήσω;

Γ.Δ: - Μπορούμε να δώσουμε μια όμορφη μαθηματική αιτιολόγηση... με την ισότητα των πολυωνύμων.

**Τι μας λέει η Άλγεβρα;**

" Δύο πολυώνυμα  $P(x)$  και  $Q(x)$  θα λέμε ότι είναι ίσα, όταν και μόνο όταν, οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του  $x$  είναι ίσοι".

$$P(x) = x_A = x_{0,A} + v_{0,A}t + \frac{1}{2}a_A t^2$$

$$Q(x) = x_A = -5 + 3t + t^2$$

### Πρόταση 3<sup>η</sup> - Το μονωμένο σύστημα

Να δείξετε ότι το σύστημα των δύο σωμάτων κάθε στιγμή είναι μονωμένο.

### Απάντηση 3<sup>η</sup>

Δείξαμε παραπάνω ότι :

Το σώμα A έχει επιτάχυνση

$$a_A = 2\text{m/s}^2 .$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα A θα είναι

$$\Sigma F_A = m a_A \rightarrow \Sigma F_A = 1\text{N}$$

Το σώμα B έχει επιτάχυνση

$$a_B = - 2\text{m/s}^2 .$$

Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα Α θα είναι

$$\Sigma F_B = m a_B \rightarrow \Sigma F_B = -1N$$

Αλλά η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα των σωμάτων Α και Β.

$$\Sigma F_{\text{συστ}} = \Sigma F_A + \Sigma F_B \rightarrow \Sigma F_{\text{συστ}} = 1N - 1N \rightarrow$$

$$\Sigma F_{\text{συστ}} = 0$$

Το σύστημα είναι μονωμένο.

Άρα ισχύει η Α.Δ.Ο σε κάθε θέση των σωμάτων κάθε χρονική στιγμή.

### Πρόταση 4<sup>η</sup> - Η κρούση

Αν τα σώματα συγκρούονται πλαστικά να βρεθεί η ταχύτητα τους την χρονική στιγμή :  $t' = 5s$ .

Να παρασταθεί γραφικά σε κοινούς άξονες η ορμή των σωμάτων πριν την κρούση και η ολική ορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση.

### Απάντηση 4<sup>η</sup>

Δείξαμε προηγουμένως ότι το σύστημα των σωμάτων Α και Β είναι μονωμένο. Άρα η ορμή του διατηρείται κάθε χρονική στιγμή.

Μπορούμε να πούμε ότι για το σύστημα των σωμάτων Α και Β :

$$P_{\text{ολ,αρχ}} = P_{\text{ολ,τελ}}$$

Όμως πριν την κρούση

$$P_{\text{ολ,αρχ}} = P_A + P_B$$

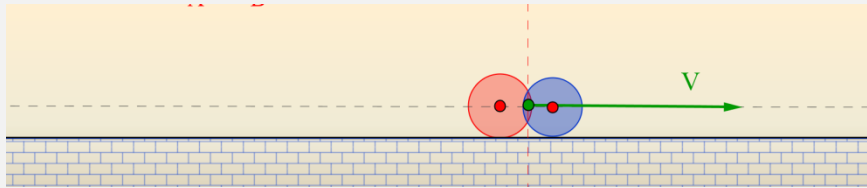
$$\text{αλλά: } P_A = 1,5 + t \text{ (S. I) και } P_B = -0,5 - t \text{ (S. I)}$$

$$\rightarrow P_{\text{ολ,αρχ}} = 1,5 + t - 0,5 - t$$

$$P_{\text{ολ,αρχ}} = 1\text{Kgr m/s}$$

Για το συσσωμάτωμα που προκύπτει μετά την κρούση

$$P_{ολ,τελ} = 2mV$$



Από την Α.Δ.Ο.

$$P_{ολ,αρχ} = P_{ολ,τελ}$$

$$P_{ολ,αρχ} = 2mV$$

$$V = 1m/s$$

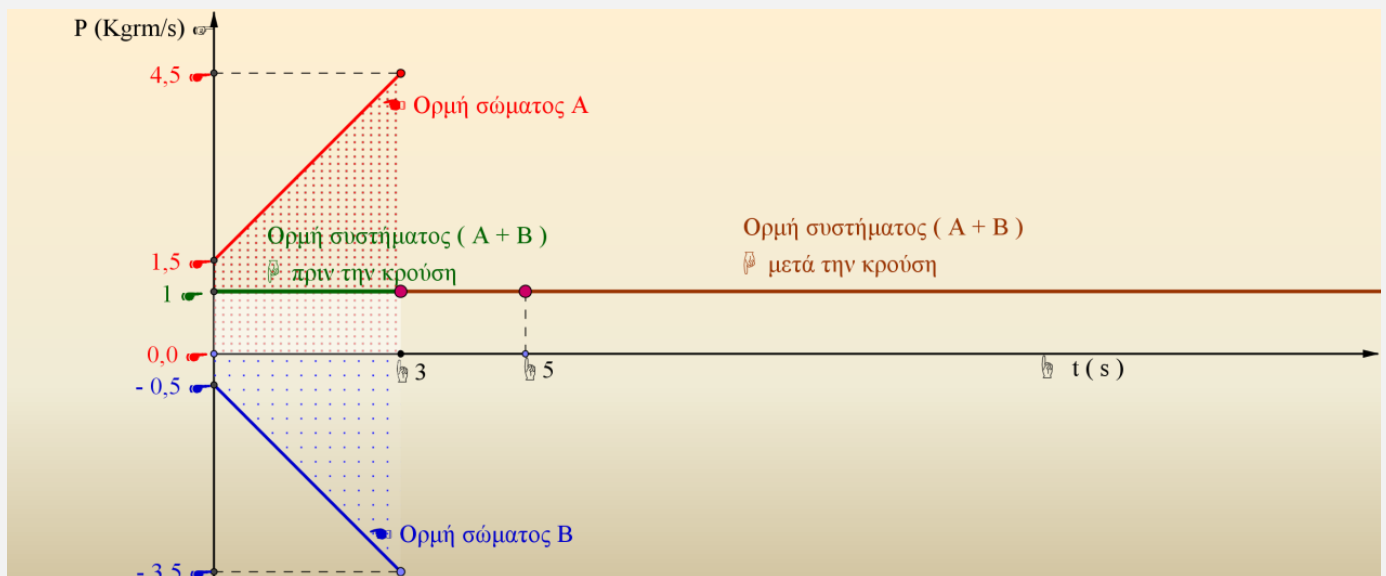
Όμως η ταχύτητα αυτή θα είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αλλά και του **κάθε σώματος για κάθε στιγμή**

$$t > 3s \text{ άρα και την } t' = 5s.$$

Το σύστημα - συσσωμάτωμα θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση αφού κάθε στιγμή

$$\Sigma F_{\text{συστ}} = 0$$

Το παρακάτω διάγραμμα μας "δείχνει" την ιστορία της κίνησης των δύο σωμάτων Α και Β.



### Πρόταση 5<sup>η</sup> - Οι δυνάμεις στην κρούση

Αν ο χρόνος κρούσης μεταξύ των σωμάτων Α και Β είναι

$$\Delta t = 0,01s$$

Να υπολογιστεί η μέση δύναμη που ασκήθηκε σε κάθε σώμα κατά διάρκεια της κρούσης. Να συγκριθεί με την δύναμη που προκάλεσε την επιταχυνόμενη κίνηση του σώματος Α και του σώματος Β.

### Απάντηση 5<sup>η</sup>

#### Σώμα Α

$$F'_A = \frac{\Delta P_A}{\Delta t} \rightarrow F'_A = \frac{P_{A,τελ} - P_{A,αρχ}}{\Delta t} \rightarrow F'_A = \frac{mV - P_{A,αρχ}}{\Delta t}$$

$$F'_A = \frac{0,5 - 4,5}{0,01} \text{ N} \rightarrow F'_A = -400\text{N}$$

#### Σώμα Β

$$F'_B = \frac{\Delta P_B}{\Delta t} \rightarrow F'_B = \frac{P_{B,τελ} - P_{B,αρχ}}{\Delta t} \rightarrow F'_B = \frac{mV - P_{B,αρχ}}{\Delta t}$$

$$F'_B = \frac{0,5 - (-3,5)}{0,01} \text{ N} \rightarrow F'_B = 400\text{N}$$

Όμως παραπάνω υπολογίσαμε συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα Α από εξωτερικό αίτιο και το επιταχύνει

$$\Sigma F_A = 1\text{N} \quad \text{και η} \quad \Sigma F_B = -1\text{N}$$

Η σύγκριση μας δίνει ότι :

$$|F'_A| = 400|\Sigma F_A| \quad \text{και} \quad |F'_B| = 400|\Sigma F_B|$$

#### Τι παρατηρούμε ;

Ότι οι δυνάμεις που εμφανίζονται κατά την διάρκεια της κρούσης είναι πολύ μεγαλύτερες από τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα.

Έτσι με πολύ μεγάλη προσέγγιση μπορούμε να πούμε αυτές ευθύνονται για την μεταβολή της ορμής του κάθε σώματος.



## Ο Επίλογος

Η πρόταση αυτή γράφτηκε με την σκέψη  
να βοηθήσει τον μαθητή και την μαθήτριά  
της Β΄ Λυκείου αλλά και της Γ΄ Λυκείου.

Να μπορέσει να επαναλάβει περυσινές έννοιες που θα του είναι χρήσιμες.

Να βοηθηθεί στην εφαρμογή και την κατανόηση των εννοιών :

- Ορμή
- Μονωμένο σύστημα
- Αρχή της Διατήρησης της Ορμής.
- Κρούση
- Δυνάμεις στην διάρκεια της κρούσης.

Γράφτηκε και παρουσιάστηκε με όσο πιο απλό τρόπο  
μπορούσα για να μπορέσει ο μαθητής εύκολα να ασχοληθεί.

Όταν την έγραφα ... είχα "μπροστά μου"

δύο μαθητές.

Ένα που προσπαθεί ...και ένα πολύ καλό.

Αυτοί με "οδήγησαν".

Αξίζουν πάντα τα παιδιά.

Γι' αυτό ας προσπαθούμε... να τα θυμόμαστε.

Δογμαματζάκης Γιάννης