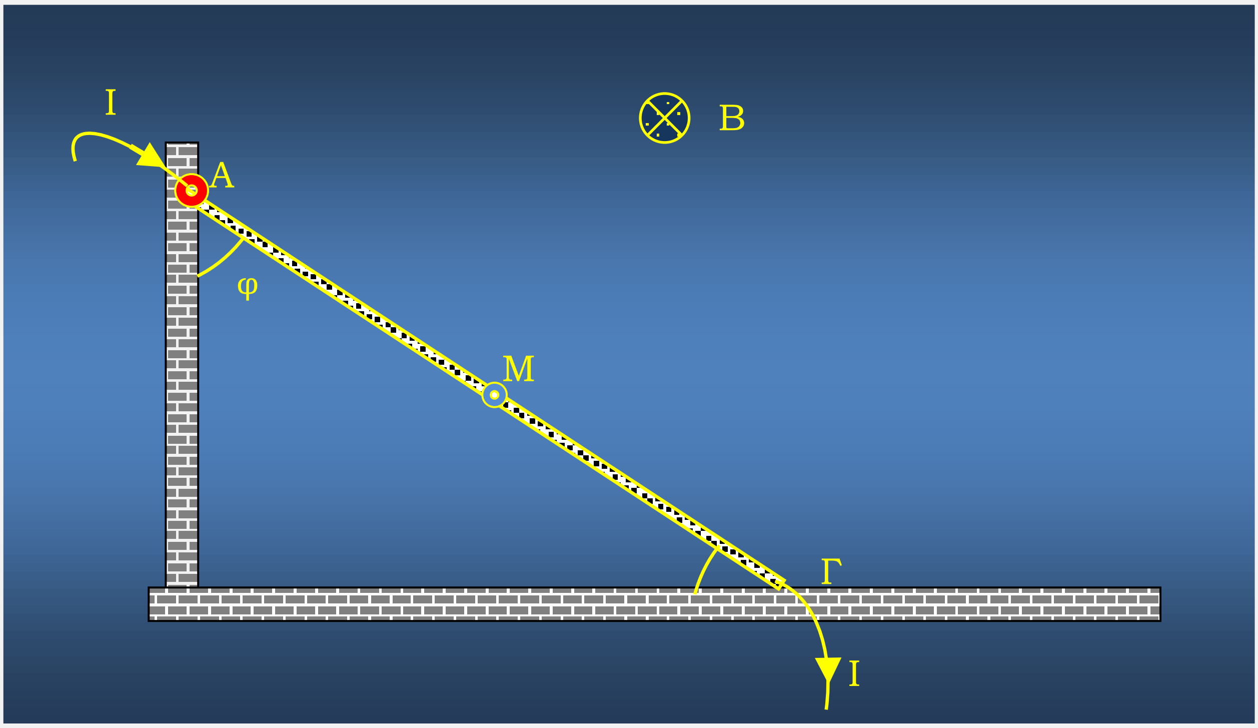
Μια ''Rock -διασκευή''
σε μια '' κλασική άσκηση''
του σχολικού βιβλίου

Ευθύγραμμος άκαμπτος ομογενής μεταλλικός αγωγός μήκους L = 2m και μάζας m = 2kgr ισορροπεί πάνω σε δύο μη αγώγιμα και λεία επίπεδα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο αγωγός σχηματίζει γωνία $\varphi = \pi/6$ rad με το κατακόρυφο επίπεδο.
Είναι συνδεμένος με άρθρωση στο σημείο Α του κατακόρυφου επιπέδου.
Ο αγωγός βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης B=1T.
Διαβιβάζω στον αγωγό συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής έντασης I = 5 A.

Ερώτημα 1^0 : Οι δυνάμεις και η ισορροπία

Να υπολογιστούν :

α. Οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό ΑΓ από το λείο δάπεδο και την άρθρωση .

β. Να σχολιασθεί το αποτέλεσμα.

Δίνεται : $g = 10\ m/s^2$, ημ(π/6) = 1/2 , συνφ(π/6) = √3/2.

Απάντηση

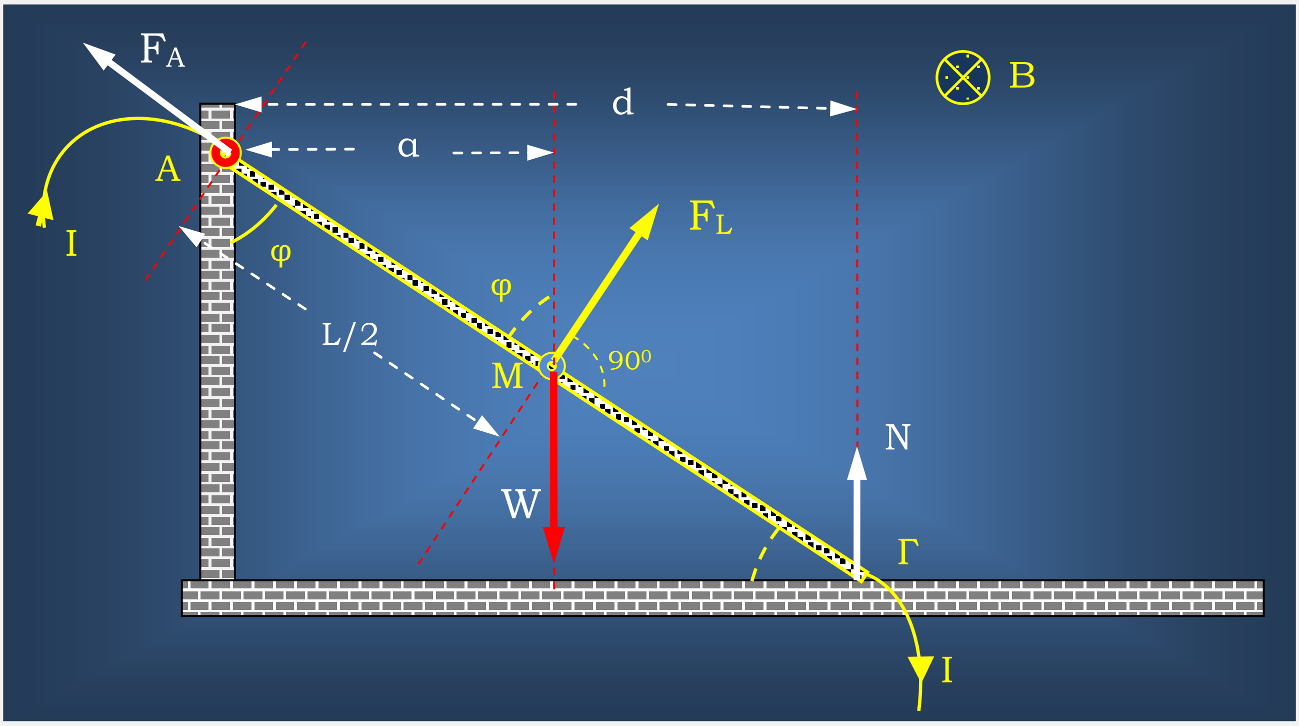
α . Οι δυνάμεις που ασκούνται στο αγωγό ΑΓ είναι :

- Βάρος του αγωγού : W= mg με σημείο εφαρμογής το μέσο του Μ αφού είναι ομογενής και ισοπαχής.

- Δύναμη Laplace: F_L= BIL κάθετη στον αγωγό και στο μέσο του με φορά προς τα πάνω (κανόνας δεξιάς παλάμης)

- Δύναμη από την άρθρωση : F_A

- Δύναμη επαφής : Ν κάθετη δύναμη στο οριζόντιο επίπεδο.



Ο αγωγός ισορροπεί.

1η Συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma\tau_A = 0$$

Θετική φορά θεωρώ την αντίθετη της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

$\tau_W + \tau_{F_L} + \tau_{F_A} + \tau_N = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_W = -W \cdot \alpha \\ \text{Αλλά το } \alpha = \frac{L}{2}\,\eta\mu\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \tau_W = -\,mg\,\frac{L}{2}\,\eta\mu\varphi$$

$\tau_{F_L} = F_L\frac{L}{2} \rightarrow \tau_{F_L} = BIL\frac{L}{2}$

$\tau_{F_A} = 0$

$\tau_N = N \cdot d$

Θέτω στην σχέση: $\tau_W + \tau_{F_L} + \tau_{F_A} + \tau_N = 0 \rightarrow$

$-mg\frac{L}{2}\eta\mu\varphi + BIL\frac{L}{2} + 0 + N \cdot d = 0 \rightarrow$

Αλλά : m = 2kgr , L = 2m , B=1T , I = 5 A.

ημ(π/6) = 1/2, g = 10 m/s^2 .

Αντικαθιστώ :

$-10 + 10 + N \cdot d = 0 \rightarrow N \cdot d = 0$ αλλά $d \neq 0$

Άρα η δύναμη επαφής από το έδαφος είναι μηδέν

$N = 0$

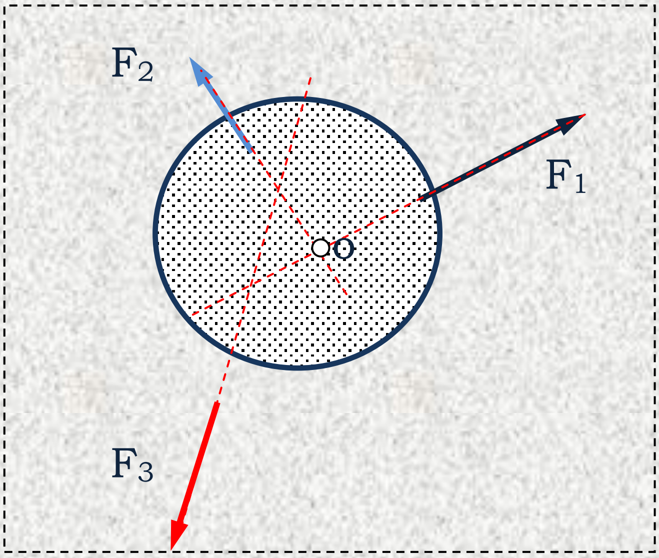
Στην θέση αυτή στον αγωγό ΑΓ ασκούνται τελικά τρείς δυνάμεις
και ο αγωγός βρίσκεται σε ισορροπία.

Μια πολύ χρήσιμη υπενθύμιση

Όταν σε ένα στερεό που ισορροπεί ασκούνται τρεις ομοεπίπεδες δυνάμεις τότε και οι φορείς τους διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Την παραπάνω συνθήκη μπορούμε να την γενικεύσουμε
και για N- ομοεπίπεδες δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στερεό
σώμα που ισορροπεί.

Αν σε ένα στερεό σώμα που ισορροπεί ασκούνται
ν ομοεπίπεδες δυνάμεις και οι ν-1 διέρχονται από το ίδιο
σημείο τότε αναγκαστικά περνά και η ν-οστή δύναμη.



Για την απόδειξη εφαρμόζουμε την μέθοδο της “ εις άτοπο απαγωγής”.

Έστω ότι οι φορείς των δυνάμεων F_1 και F_2 τέμνονται στο σημείο O.

Ο φορέας της F_3 δεν διέρχεται από το στο σημείο O .
(Δες το παραπάνω σχήμα).

Αφού ισορροπεί το στερεό πρέπει :

$$\Sigma\tau_O = 0$$

$$\Sigma\tau_O = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} + \tau_{F_3} \quad \text{αλλά} \quad \tau_{F_1} = 0\ ,\ \tau_{F_2} = 0\ ,\ \tau_{F_3} \neq 0\ ,$$

$$\Sigma\tau_O \neq 0$$

Άρα το στερεό δεν θα ισορροπούσε.

Άτοπο.

Επομένως οι δυνάμεις διέρχονται από το ίδιο σημείο.

!!!!! Προσοχή !!!!!

- ✓ Όταν οι δύο από τις τρείς δυνάμεις είναι παράλληλες
ΔΕΝ
ισχύει η παραπάνω πρόταση.

- ✓ Αν οι δύο από τις τρείς δυνάμεις είναι παράλληλες
τότε θα είναι και η τρίτη παράλληλη προς αυτές.

Στο ερώτημα μας τώρα.

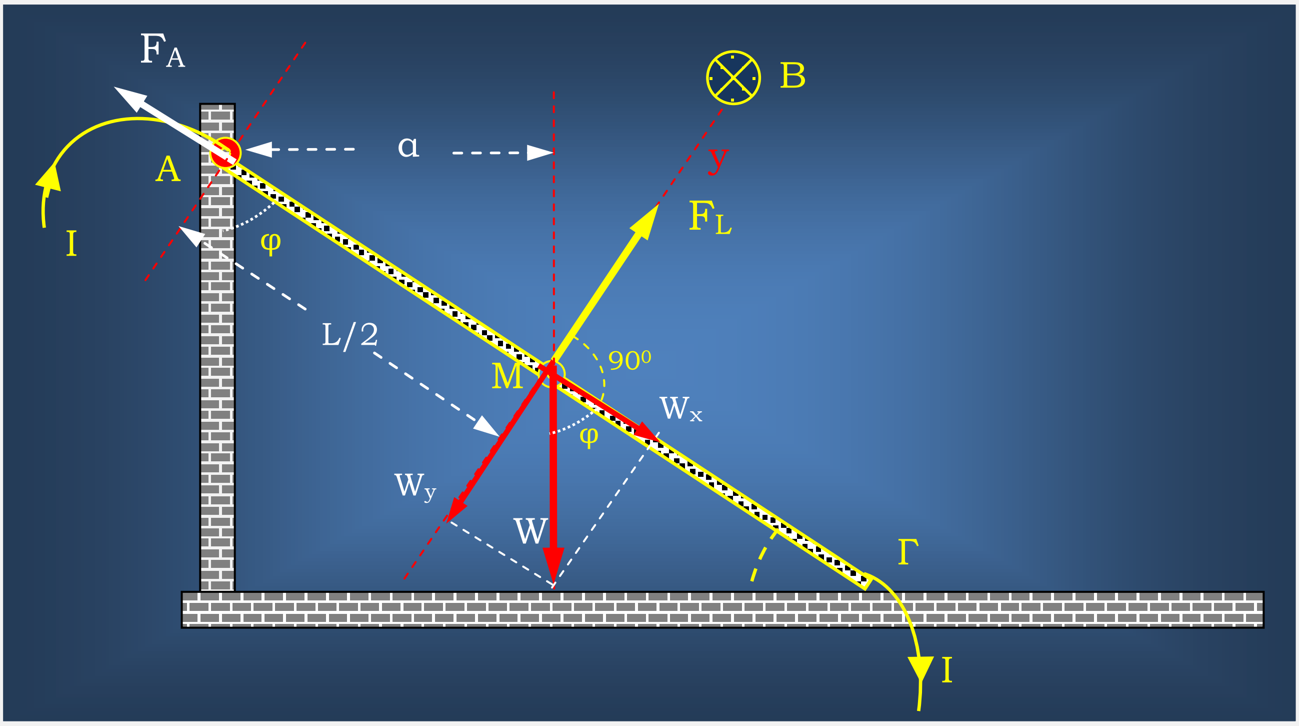
Στον αγωγό ασκούνται τελικά οι τρεις δυνάμεις: W , F_L , F_A .

Το βάρος W και δύναμη Laplace F_L έχουν κοινό σημείο εφαρμογής το μέσο Μ του αγωγού.

Αφού ο αγωγός ισορροπεί ο φορέας της F_A πρέπει να διέρχεται και αυτός από το μέσο Μ.

Όμως το σημείο εφαρμογής της είναι το σημείο Α της άρθρωσης.

Άρα η διεύθυνση της F_A συμπίπτει με τον αγωγό ΑΓ.



Αναλύω το βάρος σε δύο συνιστώσες (x ,y):

$$W_x = mg\text{συν}\varphi \quad \text{και} \quad W_y = mg\text{ημ}\varphi$$

Αλλά στον άξονα (x) ισχύει :

$$\Sigma F_x = 0 \ \rightarrow F_A - W_x = 0 \ \rightarrow \ F_A = mg\text{συν}\varphi \ \rightarrow$$

$$F_A = 10\sqrt{3}\ \text{N}$$

β. Σχολιασμός του αποτελέσματος.

- ✓ Για την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει τον αγωγό $I = 5\ A$ χάνεται οριακά η επαφή του με το οριζόντιο έδαφος.

Ερώτημα 2^0 : Η αιωρούμενη … ράβδος

α. Να βρεθεί σε ποια θέση ισορροπίας του ρευματοφόρου αγωγού η δύναμη δέχεται από την άρθρωση είναι μηδέν.

β. Πόση είναι τότε η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που χρειάζεται να διαρρέει τον αγωγό.

Απάντηση

α . Δεν γνωρίζω που μπορεί να είναι η ζητούμενη θέση.
Έτσι θεωρώ όλες τις δυνάμεις που μπορεί να ασκούνται στο αγωγό ΑΓ.

- Βάρος του αγωγού : $W= mg$ με σημείο εφαρμογής το μέσο του Μ αφού είναι ομογενής και ισοπαχής.

- Δύναμη Laplace: $F_L = BIL$ κάθετη στον αγωγό και στο μέσο του με φορά προς τα πάνω (κανόνας δεξιάς παλάμης)

- Δύναμη από την άρθρωση στο κατακόρυφο επίπεδο : F_A

- Δύναμη επαφής : N κάθετη δύναμη στο οριζόντιο επίπεδο.

Συνθήκη ισορροπίας στην μεταφορική κίνηση :

$$\vec{W} + \vec{F_A} + \vec{F_L} + \vec{N} = 0$$

Θέλουμε η δύναμη από την άρθρωση $(\overrightarrow{F_A} = 0)$ να είναι μηδέν.

$$\vec{W} + \vec{F_L} + \vec{N} = 0$$

Όμως πρέπει ο αγωγός να ισορροπεί.
Οι δυνάμεις πρέπει να διέρχονται από ίδιο σημείο αφού δεν είναι όλες παράλληλες.

Το $\vec{W}$ και $\vec{F_L}$ διέρχονται από το μέσο του αγωγού.

Συνθήκη ισορροπίας

$$\Sigma\tau_M = 0$$

Θετική φορά θεωρώ την αντίθετη της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

$\tau_W + \tau_{F_L} + \tau_N = 0$

Αλλά : $\tau_{W_M} = 0$, $\tau_{F_{LM,}} = 0$, $\tau_N = N\frac{L}{2}\eta\mu\varphi$

Αντικαθιστώ:

$$0 + 0 + N\frac{L}{2}\eta\mu\varphi = 0 \rightarrow N = 0$$

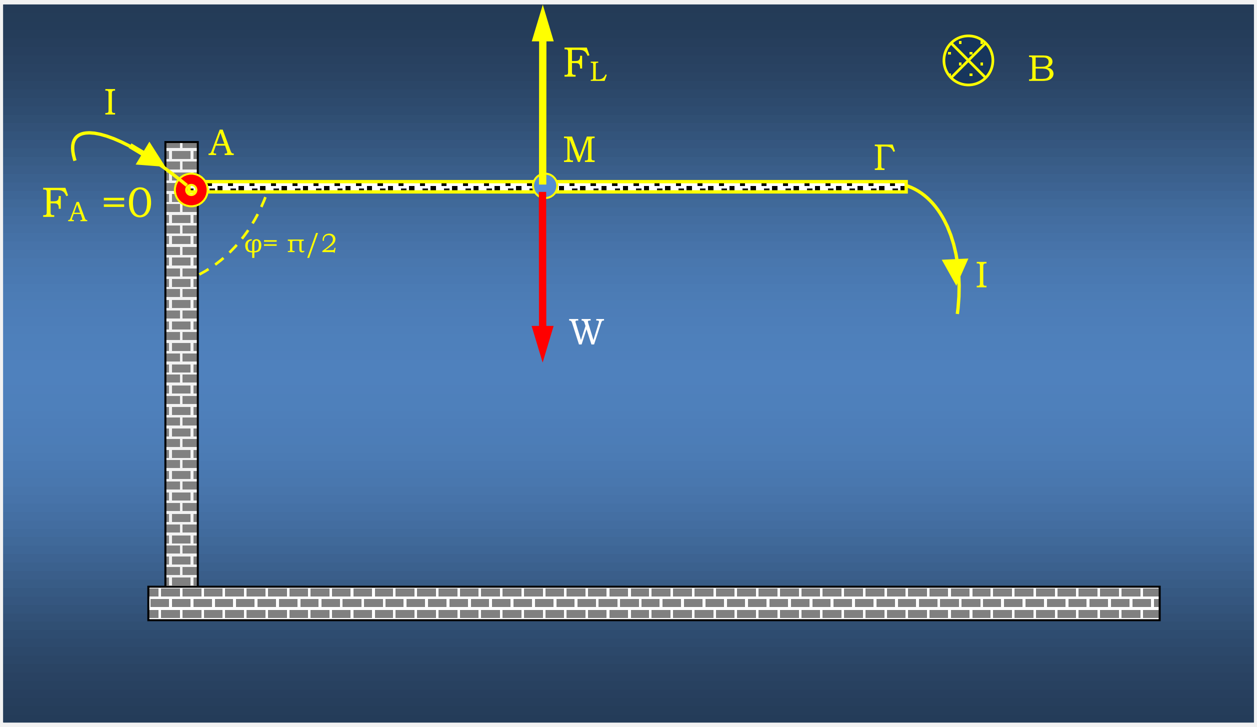
Άρα για να ισορροπεί πρέπει η δύναμη που δέχεται από το δάπεδο να είναι μηδέν.

$$\vec{N} = 0$$

Τελικά στον αγωγό ασκούνται το βάρος του και η δύναμη Laplace. Αφού ο αγωγός ισορροπεί :

$$\vec{W} + \vec{F_L} = 0 \rightarrow \vec{W} = -\vec{F_L}$$

Αυτή η συνθήκη ισχύει μόνο στην περίπτωση που ο αγωγός είναι οριζόντιος.



Διότι η $\vec{F_L}$ είναι συνεχώς κάθετη στον αγωγό ΑΓ.

Άρα για να είναι η δύναμη από την άρθρωση μηδέν
πρέπει ο αγωγός να ισορροπεί οριζόντιος.

!!! Δηλαδή ο αγωγός να αιωρείται !!!

β. Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος που χρειάζεται να διαρρέει τον αγωγό τότε θα είναι :

$$\vec{W} = -\vec{F_L} \rightarrow |\vec{W}| = |\vec{F_L}| \rightarrow mg = BIL \rightarrow$$

$$I = \frac{mg}{BL} \quad \rightarrow \quad I = 10A$$

Σχόλιο : Η άσκηση μπορεί να λυθεί και χωρίς την χρήση
της πρότασης όμως είναι αρκετά δύσκολη η διαδικασία.

Γιάννης Δογραματζάκης