

Το δάκρυ της Μαρίας ...για μια ιδιόμορφη
περιοδική κίνηση .

Η στραβός είναι ο γιαλός ... ή στραβά αρμενίζουμε.

Μια σύντομη ... ‘εισαγωγή’

Πάντα παρακινώ τους μαθητές μου να συζητούν μαζί μου όλες τις απορίες – ερωτήσεις που έχουν στην Φυσική.
Όποιες κι’ αν είναι και ανεξάρτητα από την ύλη που διδάσκονται.

‘Τα προβλήματα που έχετε στην Φυσική κάντε τα δικά μου.
Μην διστάζετε...’

Αυτή η μέθοδος τις περισσότερες φορές με βοηθά σημαντικά για την προσαρμογή της διδακτικής μου πρότασης.
Ως προς το περιεχόμενο αλλά και ως προς τον τρόπο διδασκαλίας.
Ορισμένες φορές πάλι βρίσκομαι μπροστά σε δύσκολες καταστάσεις.
Μια τέτοια περίπτωση αντιμετώπισα προχθές και ήθελα να την μοιραστώ μαζί σας.
Η Μαρία με πλησίασε με ολοφάνερη την απογοήτευση στα μάτια της.

- ‘Κύριε Γιάννη μπορείτε να μου λύσετε μια άσκηση...;’
- Ευχαρίστως Μαρία...’
- Ξέρετε χθες την προσπαθούσα όλο το απόγευμα και δεν μπόρεσα να κάνω ...τίποτα. Έχασα τον χρόνο μου...’
- Ποτέ δεν χάνει χρόνο Μαρία αυτός που σκέφτεται και προσπαθεί ...’
- Ναι αλλά αν πέσει μια...τέτοια στις εξετάσεις; Τι θα κάνω;

Αυτή ήταν η αντίδραση της ...και τα μάτια της βούρκωσαν.
Της χαμογέλασα προσπαθώντας να ελαφρύνω ...το βάρος της.

- Έλα πες μου την άσκηση ...Που την βρήκες ;

- Την έδωσε ο καθηγητής μου από ένα ...εξωσχολικό βιβλίο.
Είναι στις άλυτες . Μόνο το αποτέλεσμα μας δίνει... ’

Η Μαρία μου είπε ...‘το βιβλίο’ και την εκφώνηση της άσκησης.

Δεν σας το κρύβω ...έγινα χειρότερα από την Μαρία.
Προσπάθησα να διαχειριστώ την αντίδραση μου.

Που οδηγούμαι ...αυτά τα παιδιά;

Η εκφώνηση όπως την αντέγραψα από το ...‘εξωσχολικό βιβλίο’.

Ένα σωματίδιο εκτελεί ταυτόχρονα δύο α.α.τ. ίδιας διεύθυνσης και θέσης
ισορροπίας με εξισώσεις :

$$\alpha. x_1 = 0.4\eta\mu(18\pi t) \quad \beta. x_2 = 0.3\eta\mu(10\pi t) \text{ στο S.I.}$$

1. Να βρεθεί η χρονική στιγμή που το σωματίδιο θα έχει την μέγιστη δυνατή απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας του για πρώτη φορά.

2. Να βρεθεί η περίοδος της περιοδικής κίνησης που θα εκτελέσει το σωματίδιο.

Για μια στιγμή σκέφτηκα να πετάξω πέρα ...το βιβλίο και να πω:

- Παράτα τους ... Μαρία.

Σκέφτηκα όμως τον κόπο της αλλά ... και την υπόσχεση μου.

Της είπα ότι θα την λύσω ... και θα την συζητήσουμε την επόμενη μέρα.

- Δεν μπορείτε τώρα γιατί την χρειάζομαι σήμερα;

Στο μυαλό μου στριφογύριζε όλη η συζήτηση που είχε γίνει στο Υ.Φ.Χ από τους φίλους και άξιους Φυσικούς αυτές τις μέρες.

- Δεν είναι ‘άσκηση της μιας ματιάς’ ...Μαρία.
Άφησε μου λίγο χρόνο να την ‘κοιτάξω’.

- Εντάξει κύριε...όμως μην την ξεχάσετε. Θέλω να την...ξέρω.
Γιατί ...ποιος ξέρει τι μπορεί να συμβεί.

Ξανά διερωτήθηκα ...’ Μα που οδηγούμαι ...αυτά τα παιδιά;

- Ναι αύριο θα την συζητήσουμε...δεν θα το ξεχάσω.

Κάθισα το απόγευμα ...να την προσπαθήσω.
Έγραφα – έσβηνα. Σκέφτηκα μια στιγμή να την παρατήσω.
Όμως το ...δάκρυ της Μαρίας με κρατούσε.

Η λύση που έδωσα ...τελικά.

Ερώτημα 1⁰

Από τις δεδομένες εξισώσεις

$$x_1 = 0.4\eta\mu(18\pi t) \quad \text{και} \quad x_2 = 0.3\eta\mu(10\pi t)$$

η τελική κίνηση που θα προκύψει θα έχει εξίσωση :

$$x = x_1 + x_2 \rightarrow x = 0.4\eta\mu(18\pi t) + 0.3\eta\mu(10\pi t) \quad \text{S.I.}$$

Αφού ζητώ την μέγιστη δυνατή απομάκρυνση δεν έχω παρά να αναζητήσω την μέγιστη δυνατή τιμή της παραπάνω παράστασης.

Αυτή μπορεί να προκύψει... αν την ίδια χρονική στιγμή μπορεί έχουμε :

$$\left. \begin{array}{l} \eta\mu(18\pi t) = 1 \\ \eta\mu(10\pi t) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 18\pi t = 2k_1\pi + \frac{\pi}{2} \\ 10\pi t = 2k_2\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 18\pi t = \frac{(4k_1+1)\pi}{2} \\ 10\pi t = \frac{(4k_2+1)\pi}{2} \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} 18t = \frac{(4k_1+1)}{2} \\ 10t = \frac{(4k_2+1)}{2} \end{array} \right\} \text{ Διαιρώ } \frac{18t}{10t} = \frac{4k_1+1}{4k_2+1} \rightarrow \frac{9}{5} = \frac{4k_1+1}{4k_2+1} \rightarrow$$

$$36k_2 + 9 = 20k_1 + 5 \rightarrow 20k_1 = 36k_2 + 4 \rightarrow$$

$$k_1 = 1.8k_2 + 0.2$$

αλλά οι τιμές που παίρνουν τα k_1 και k_2 είναι $(k_1, k_2) = 0, 1, 2, 3 \dots$
Το πρώτο ζευγάρι που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση είναι :

$$k_2 = 1 \quad \text{και} \quad k_1 = 2$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις :

$$18t = \frac{(4k_1+1)}{2} \rightarrow t_1 = \frac{9}{2 \cdot 18} s \rightarrow t_1 = \frac{1}{4} s$$

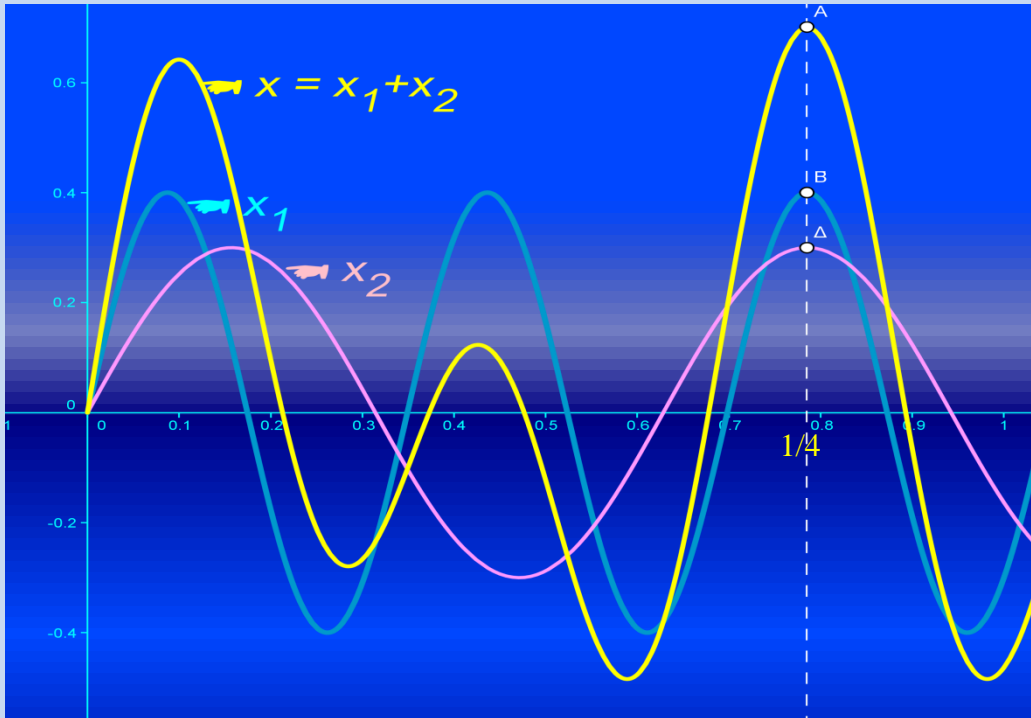
$$\text{όμοια βρίσκω: } 10t = \frac{(4k_2+1)}{2} \rightarrow t_2 = \frac{1}{4} s$$

Άρα την στιγμή : $t = \frac{1}{4} \text{ s}$

έχω την μέγιστη δυνατή απομάκρυνση για πρώτη φορά
και η τιμή της είναι :

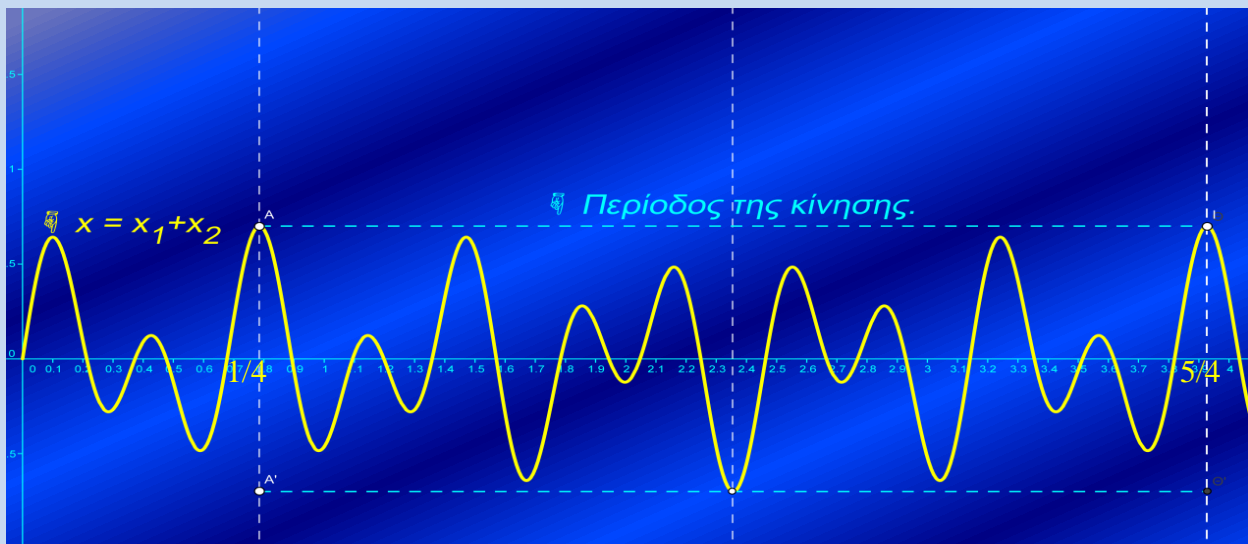
$$x_{max} = (0.4 + 0.3) \text{ m} \quad \text{ή} \quad x_{max} = 0.7 \text{ m}.$$

Παρακάτω γραφική παράσταση επιβεβαιώνει την ‘σύμπτωση’
των μέγιστων τιμών των εξισώσεων x_1 και x_2 την ίδια χρονική στιγμή.



Ας πάμε τώρα στο 2^ο Ερώτημα.

Να βρεθεί η περίοδος της περιοδικής κίνησης που θα εκτελέσει το
σωματίδιο.



Στην παραπάνω γραφική παράσταση της εξίσωσης κίνησης φαίνεται ότι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών μέγιστων τιμών της απομάκρυνσης μπορεί να χαρακτηριστεί ως η περίοδος της κίνησης.

Έτσι θα αναζητήσω την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή από την $t = \frac{1}{4} \text{ s}$ που έχω την μέγιστη δυνατή απομάκρυνση.

Παίρνω την εξίσωση που συνδέει τα k_1 και k_2

$$k_1 = 1.8k_2 + 0.2$$

Οι τιμές

$$k_2 = 6 \quad \text{και} \quad k_1 = 11$$

είναι το αμέσως επόμενο ζεύγος τιμών μετά το ζεύγος $k_2 = 1, k_1 = 2$ που βρήκαμε παραπάνω.

Ας υπολογίσουμε τώρα την επόμενη στιγμή που θα έχουμε για δεύτερη φορά την μέγιστη δυνατή απομάκρυνση.

$$\text{Παίρνω τις σχέσεις: } 18t = \frac{(4k_1+1)}{2} \quad \text{και} \quad 10t = \frac{(4k_2+1)}{2}$$

και αντικαθιστώ τις τιμές:

$$k_2 = 6 \quad \text{και} \quad k_1 = 11$$

$$18t = \frac{(4k_1+1)}{2} \rightarrow t'_1 = \frac{45}{2 \cdot 18} \text{ s} \rightarrow t'_1 = \frac{5}{4} \text{ s}$$

$$\text{Ομοια βρίσκω } 10t = \frac{(4k_2+1)}{2} \rightarrow t'_2 = \frac{5}{4} \text{ s}$$

Άρα η στιγμή που θα έχουμε για δεύτερη φορά την μέγιστη δυνατή απομάκρυνση είναι

$$t' = \frac{5}{4} \text{ s}$$

Επομένως η περίοδος της κίνησης θα είναι:

$$T = \frac{5}{4} \text{ s} - \frac{1}{4} \text{ s} \rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Σχόλιο: Δεν σας κρύβω ότι ο χαρακτηρισμός της περιόδου της κίνησης με προβληματίσε αρκετά... και 'κάτι' ακόμα με απασχολεί.

Ο επίλογος

Όταν είχα τελειώσει πια την συζήτηση της άσκησης
η Μαρία με κοίταξε με ένα ήρεμο ύφος .
Το πρόσωπο της είχε μια περίεργη έκφραση.

- Μα αλήθεια κύριε ...μπορούσαμε εμείς να την λύσουμε ;
Είναι μέσα στις δυνατότητες μας;

Δεν μίλησα.

Απλά σκέφτηκα πάλι τον υπότιτλο που έβαλα.

Η στραβός είναι ο γιάλος ... ή στραβά αρμενίζουμε.

Υ.Γ : Όλα τα παραπάνω ...έτσι ακριβώς συνέβησαν.

Τα συμπεράσματα ...δικά σας.

Η Μαρία σίγουρα θα την διαβάσει
και ελπίζω να χαμογελάσει.

Δογματζάκης Γιάννης