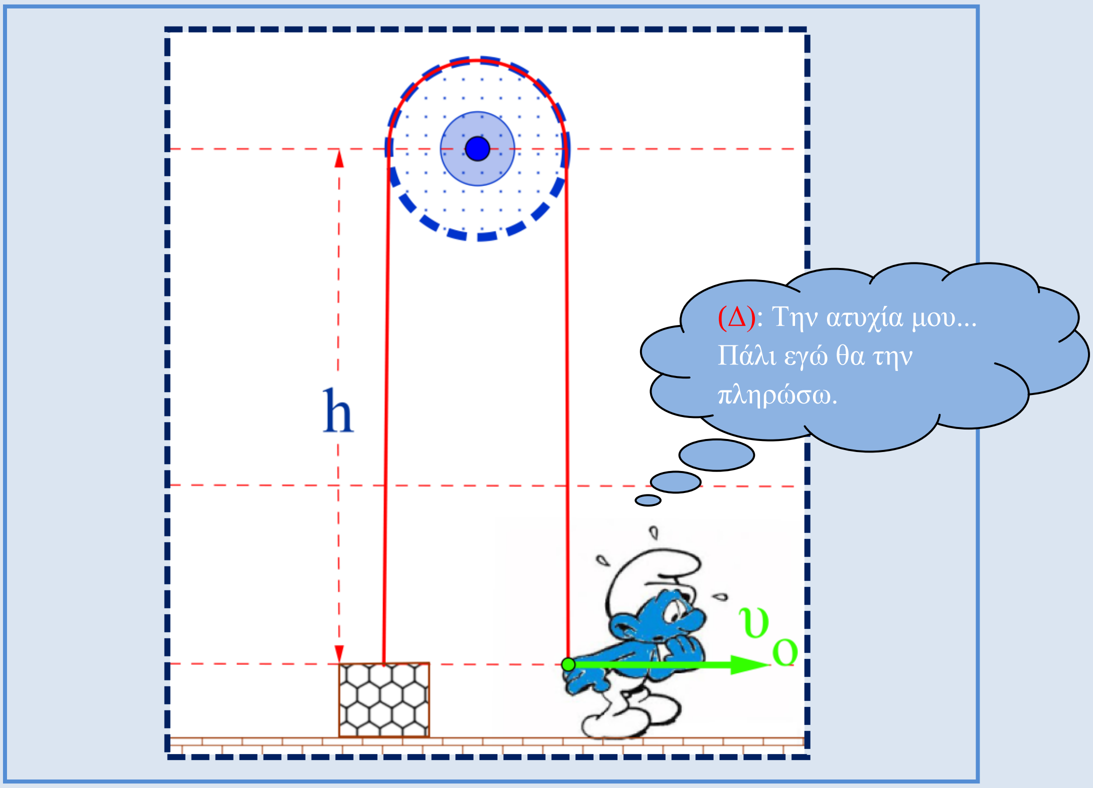
Τρεις ιδέες ...με μια τροχαλία.

Το σενάριο

Μια "ομάδα παιδιών" που τους αρέσει η Φυσική αποφάσισαν να διανυκτερεύσουν στο δάσος. Για να προστατέψουν το κιβώτιο με τα τρόφιμα από τα ζώα του δάσους επέλεξαν ένα πολύ ψηλό δέντρο.

Σε ένα οριζόντιο χοντρό κλαδί του στερέωσαν μια κατακόρυφη τροχαλία. Στο ένα άκρο αβαρούς και λεπτού αλλά δυνατού σχοινιού μεγάλου μήκους - που πέρασαν στο αυλάκι της τροχαλίας-έδεσαν το κιβώτιο. Το άλλο άκρο του ο (Δ) ο δυνατός της παρέας άρχισε να το "τραβά" με σταθερή οριζόντια ταχύτητα (υ_o).



1^{η} Ιδέα

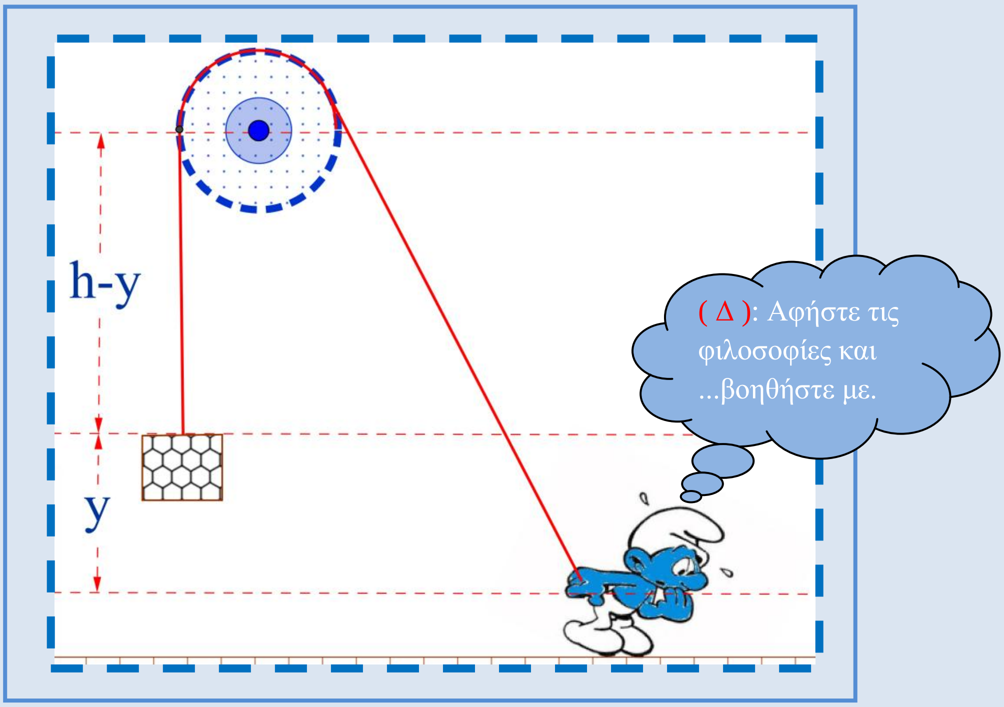
Δυο μέλη της ομάδας συζητούν για την ταχύτητα ανόδου του κιβωτίου.
Η διαφωνία τους είναι έντονη.

(Α) : - Το κιβώτιο ανεβαίνει με την ταχύτητα ($υ_ο$) που έχει ο (Δ).

(Β) : - Διαφωνώ. Καλά δεν την βλέπεις...!!!

Εσείς τι λέτε; Τι κίνηση κάνει το κιβώτιο;
Μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ;

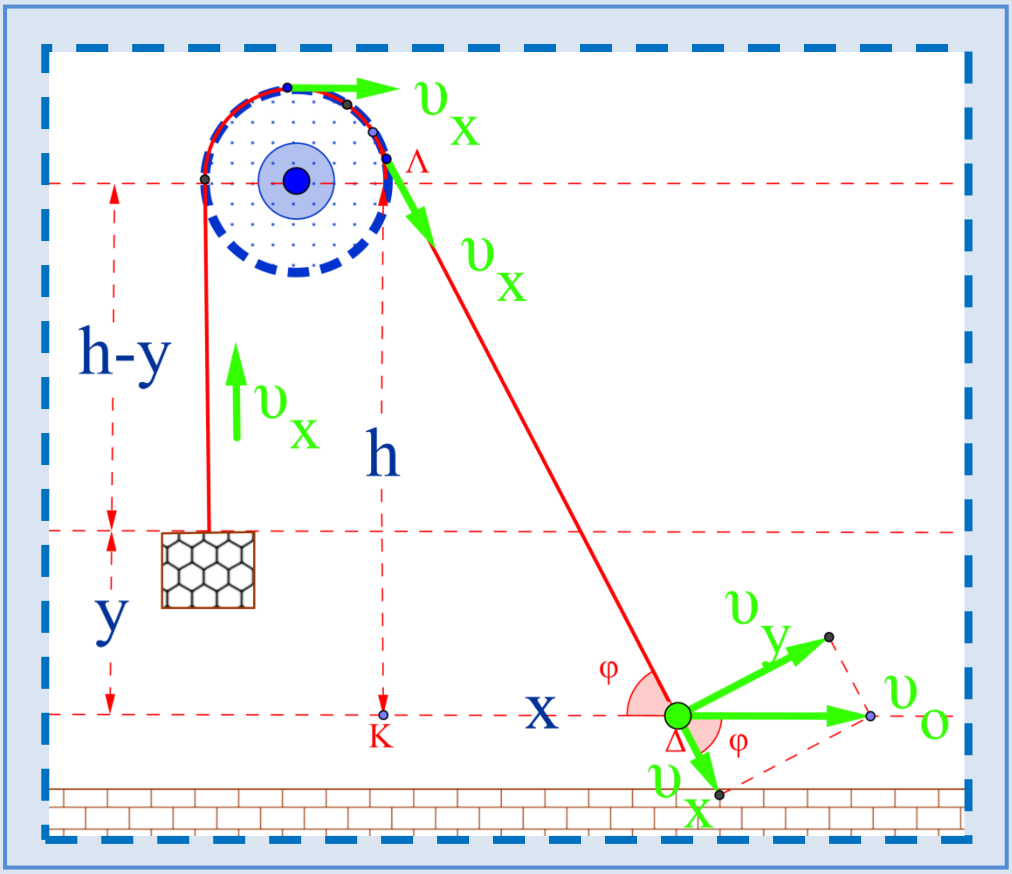
Γνωστά είναι: το ύψος (h) και η ταχύτητα ($υ_ο$) ;
Το σχοινί δεν γλιστρά (δεν ολισθαίνει) στην τροχαλία.



Απάντηση

Ας μην βιαστούμε...γιατί τα "φαινόμενα απατούν".

Η ταχύτητα του άκρου Δ του νήματος είναι ίση με την ταχύτητα (υ_o) που κινείται ο " δυνατός της παρέας (Δ) ".
Όμως η ταχύτητα που ανεβαίνει το κιβώτιο είναι ίση με την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.
Η ταχύτητα αυτή ταυτίζεται με την συνιστώσα της ταχύτητας (υ_x) του σημείου Δ του νήματος.
Δες τε το σχήμα.



Όμως η συνιστώσα (υ_x) είναι :

$$\upsilon_x = \upsilon_o \text{ συνφ}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο (ΚΛΔ) παίρνουμε

$$\text{συνφ} = \frac{\text{ΚΔ}}{\text{ΛΔ}}$$

Αλλά : ΚΔ = x . Όμως η κίνηση του (Δ) ευθύγραμμη ομαλή άρα

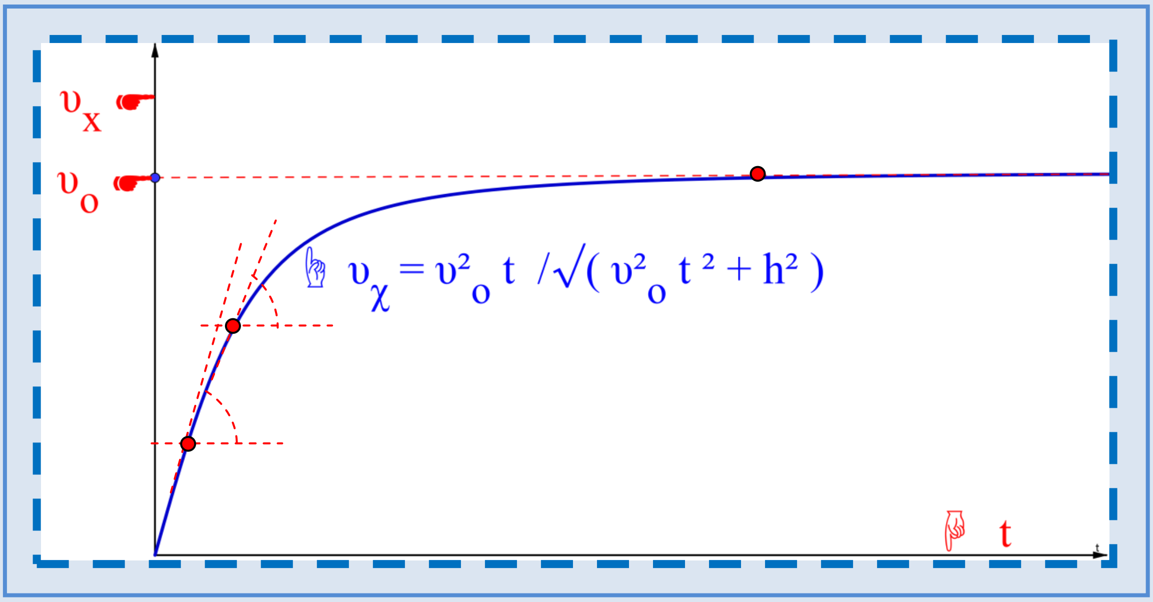
$$x = \upsilon_o\ t \quad \text{και} \quad ΚΔ = \upsilon_0 t$$

Ακόμα προκύπτει ότι : $ΛΔ = \sqrt{x^2 + h^2} \rightarrow ΛΔ = \sqrt{{\upsilon_0}^2 t^2 + h^2}$

$$\upsilon_x = \upsilon_o \frac{\upsilon_0 t}{\sqrt{{\upsilon_0}^2 t^2 + h^2}} \rightarrow$$

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_0^2\, t}{\sqrt{{\upsilon_0}^2 t^2 + h^2}}$$

Για να μπορέσουμε όμως να το "δούμε" καλύτερα το είδος κίνησης ας κάνουμε την γραφική παράσταση $(\upsilon_x - t)$ της παραπάνω σχέσης.



Δες τε ότι : Η κλίση της καμπύλης - επιτάχυνση - συνεχώς μειώνεται.
Άρα η κίνηση του κιβωτίου είναι:
Επιταχυνόμενη με επιτάχυνση που συνεχώς ελαττώνεται.
Η ταχύτητα αυξάνεται με συνεχώς μειούμενο ρυθμό.
Η τιμή της τείνει οριακά στην τιμή που συμπίπτει με την (υ_o).

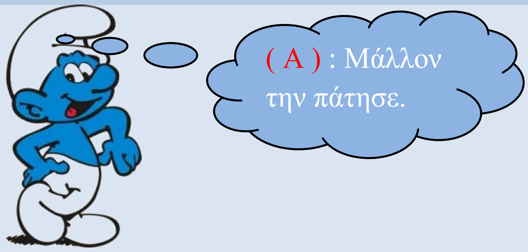
Ένα απρόσμενο - όμορφο αποτέλεσμα που δικαιώνει τον (Β).

$2^η$ Ιδέα

Η συζήτηση όμως για την κίνηση του κιβωτίου έχει ενδιαφέρον.
Ο (A) δεν "το βάζει κάτω". Προσπαθεί να "στριμώξει" τον (B).

(A) : - Μπορούμε να υπολογίσουμε τον χρόνο και την ταχύτητα που το κιβώτιο θα φτάσει την τροχαλία;

(B) : - Με δεδομένο το είδος της κίνησης του κιβωτίου που βρήκαμε οι γνώσεις μας για τις κινήσεις ... δεν μας το επιτρέπουν.



Εσείς τι λέτε; Έχει δίκιο ο (B) ;
Μπορούμε με απλές γνώσεις για τις κινήσεις να υπολογίσουμε τον χρόνο και την ταχύτητα που το κιβώτιο θα χτυπήσει την τροχαλία ;

Γνωστά είναι : το ύψος (h) και η ταχύτητα ($υ_o$) ; Δίνεται ότι $h >> R_{τροχ}$

Απάντηση $2^η$

Ας το προσπαθήσουμε.

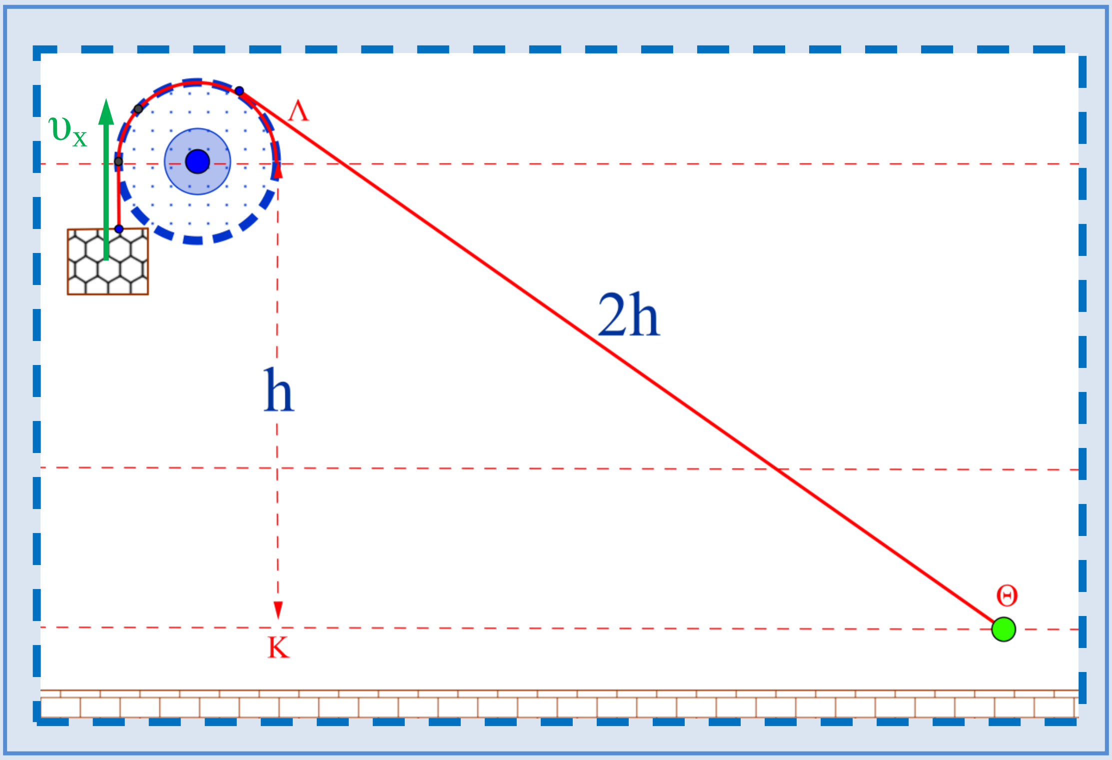
Τι είχαμε βρει παραπάνω ;

" Η κίνηση του κιβωτίου είναι επιταχυνόμενη
με επιτάχυνση ... που συνεχώς ελαττώνεται".

Όμως δεν υπάρχουν οι αντίστοιχες εξισώσεις που περιγράφουν την παραπάνω κίνηση στην Λυκειακή Φυσική.

Σκεφτόμαστε ότι: η κίνηση του κιβωτίου είναι ταυτόχρονη με τη κίνηση του " δυνατού της παρέας " (Δ) .

Ο χρόνος που χρειάζεται το κιβώτιο - από την στιγμή που θα ξεκινήσει μέχρι να χτυπήσει την τροχαλία - είναι ίσος με τον χρόνο που χρειάζεται ο "δυνατός της παρέας (Δ)" ...να διανύσει την απόσταση (ΚΘ).



Δηλαδή : $t_h = t_{(ΚΘ)}$

Όμως ο (Δ) μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα

$$υ_o = \frac{(ΚΘ)}{t_{(ΚΘ)}} \rightarrow t_{(ΚΘ)} = \frac{(ΚΘ)}{υ_o}$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο (ΛΚΘ) :

$$(ΚΘ) \cong \sqrt{4h^2 - h^2} \rightarrow (ΚΘ) = h\sqrt{3}$$

$$t_{(ΚΘ)} = \frac{h\sqrt{3}}{υ_o}$$

Η ταχύτητα που έχει το κιβώτιο είναι:

$$υ_x = \frac{υ_o^2 t}{\sqrt{{υ_o}^2 t^2 + h^2}}$$

Με αντικατάσταση του χρόνου : $t_{(K\Theta)} = \frac{h\sqrt{3}}{\upsilon_o}$

μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα που το κιβώτιο φτάνει στην τροχαλία:

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_o^2 \frac{h\sqrt{3}}{\upsilon_o}}{\sqrt{\upsilon_o{}^2 \left(\frac{h\sqrt{3}}{\upsilon_o}\right)^2 + h^2}} \rightarrow$$

$$\upsilon_x = \upsilon_o \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ή} \qquad \upsilon_x = 0.866\, \upsilon_o$$

Κάπου εδώ όμως τώρα ... την πάτησε ο (Β).

Πρόταση 3η

Η συζήτηση όμως ...έχει ανάψει. Μαζεύτηκαν και άλλοι από την παρέα.

(Α) - Να βάλουμε τώρα και ένα ερώτημα ... από την στροφική κίνηση;
(Β) - Ναι μπορούμε ...αφού έχουμε τροχαλία.
Αν και όλα τα ερωτήματα σχεδόν είναι γνωστά ...είπε υποτιμητικά.
(Γ) - Έχω ένα διαφορετικό ερώτημα που ίσως ... να μην το έχετε συναντήσει. Να το πω;
- Ναι ...ναι ...ναι...Είπαν όλοι με μια κάπως ...ειρωνική φωνή .

- Να υπολογιστεί η μέγιστη επιτάχυνση ($\alpha_{\mu,max}$) που μπορεί να αποκτήσει το κιβώτιο χωρίς να σπάσει το σχοινί. Η μέγιστη τιμή της δύναμης που μπορεί να αντέξει το σχοινί χωρίς να σπάσει είναι (F_θ).

Δίνονται : Η μέγιστη δύναμη (F_θ) , η μάζα της τροχαλίας (M) , η μάζα του κιβωτίου (m) και ροπή αδράνειας της τροχαλίας ($I_{cm,\tau\rho} = 1/2\ MR^2$).

Απάντηση 3η

- Ωραία ιδέα ...αλλά ας θυμηθούμε.

Γενικά : Όταν μας δίνουν οριακές τιμές σε φυσικά μεγέθη μπορούμε να δημιουργούμε ανισοτικές σχέσεις.

Για παράδειγμα :

Η μέγιστη δύναμη (F_θ) ή όριο θραύσης σχοινιού ή νήματος.

Η ανισοτική σχέση που "δίνει" είναι

$$F_{\nu\eta\mu\alpha\tau o\varsigma} \leq F_\theta$$

Μια άλλη περίπτωση που μας δίνει πολύ χρήσιμες και όμορφες ανισοτικές σχέσεις είναι η οριακή τιμή της στατικής τριβής.

$$T_{\sigma\tau} \leq \mu_\varsigma N$$

Ας υπολογίσουμε όμως τις δυνάμεις που ασκούνται από το σχοινί στο κιβώτιο (m) και στην τροχαλία.

- Το κιβώτιο (m) εκτελεί μεταφορική κίνηση προς τα πάνω :

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει:

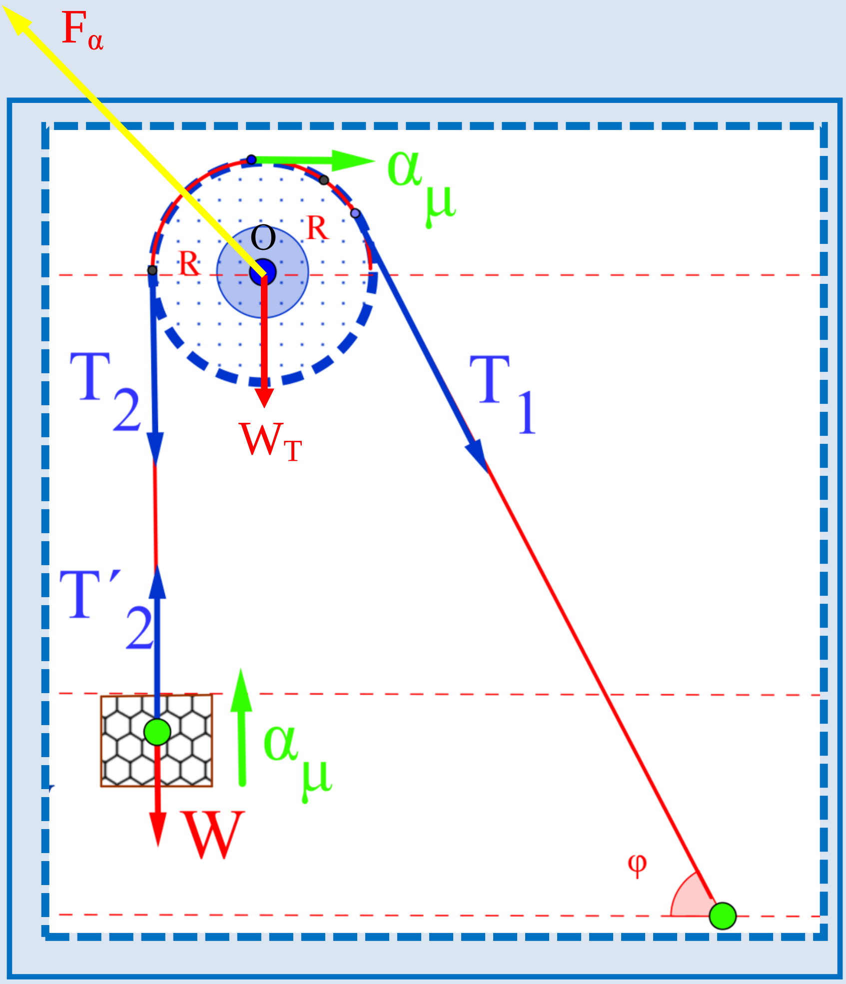
$$T'_2 - mg = m\alpha_\mu \rightarrow T'_2 = mg + m\alpha_\mu$$

- Για το κατακόρυφο σχοινί : $T_2 - T'_2 = m_\nu \alpha_\mu$

αλλά η μάζα του σχοινιού είναι αμελητέα $m_\nu \cong 0$

Άρα $T_2 = T'_2 \rightarrow$

$$T_2 = mg + m\alpha_\mu$$



- Η τροχαλία εκτελεί περιστροφική κίνηση :

Από τον Θεμελιώδη νόμο στην στροφική κίνηση προκύπτει:

$$\Sigma\tau_o = I_{cm}\alpha_\gamma \;\rightarrow\; T_1R - T_2R + W_T0 + F_\alpha 0 = I_{cm,\tau}\alpha_\gamma$$

$$T_1R - T_2R = \frac{1}{2}MR^2\alpha_\gamma \rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2}MR\alpha_\gamma$$

Αλλά σε κάθε τροχαλία που το σχοινί δεν γλιστρά (δεν ολισθαίνει)
αν (dx) είναι η ανύψωση (ή η κάθοδος) του σώματος
και (ds) το τόξο που στράφηκε η τροχαλία ισχύει ότι :

$$dx = ds \rightarrow \upsilon_\mu = \upsilon_\gamma \rightarrow \upsilon_\mu = \omega R \rightarrow \alpha_\mu = \alpha_\gamma R$$

$$T_1 = T_2 + \frac{1}{2}M\alpha_\mu \;\rightarrow\; T_1 = mg + m\alpha_\mu + \frac{1}{2}M\alpha_\mu \;\rightarrow$$

$$T_1 = mg + m\alpha_\mu + \frac{1}{2}M\alpha_\mu$$

Και τώρα τι θα κάνουμε ;

Απλά θα συγκρίνουμε τις δυνάμεις :

$T_1 = mg + m\alpha_\mu + \frac{1}{2}M\alpha_\mu$ και $T_2 = mg + m\alpha_\mu$

Παρατηρούμε ότι : $T_1 > T_2$

Για να μην σπάσει το νήμα πρέπει η μέγιστη δύναμη που μπορεί να αντέξει το σχοινί (F_θ) να είναι μεγαλύτερη από την μεγαλύτερη δύναμη.

$$F_\theta \geq T_1 > T_2$$

$$T_1 \leq F_\theta \rightarrow mg + m\alpha_\mu + \frac{1}{2}M\alpha_\mu \leq F_\theta \rightarrow$$

$$(m + \frac{1}{2}M)\alpha_\mu \leq F_\theta - mg \rightarrow \alpha_\mu \leq \frac{F_\theta - mg}{m + \frac{M}{2}} \rightarrow$$

$$\alpha_{\mu,max} = \frac{F_\theta - mg}{m + \frac{M}{2}}$$

Επίλογος

Προχθές στον πρωινό μου περίπατο ...συναντήθηκα με περσινούς μαθητές μου που είχαν πάει εκδρομή.
Έτρεξαν ...γύρω μου.

- Μας λείπετε κύριε ...μου είπαν.

- Και εσείς μου λείπετε πολύ παιδιά.

- Θυμάστε την άσκηση που μας είχατε πει ...με τα στρουμφάκια;

Ξαφνιάστηκα. Την είχα ξεχάσει εντελώς.

- Καλά ρε παιδιά ...αυτό θυμάστε;

- Ναι αλλά δεν μας την είχατε τελειώσει ...γιατί είχατε πει ότι είχε και συνέχεια στην ύλη της Γ' Λυκείου.

- Δεν πειράζει παιδιά.

- Κύριε γιατί δεν την γράφετε στην σελίδα σας ;

- Καλή η ιδέα.

- Παιδιά πάμε θα πάρουν ...απουσίες.
Περιμένουμε κύριε. Για σας .

Για αρκετή ώρα να σκεφτόμουν ... αυτή την συνάντηση.

Τα απερίγραπτα συναισθήματα που ένιωσα.

Πως "κατοικούμε" στην μνήμη των παιδιών.

Εμείς που είχαμε την ευτυχία και την τύχη να ζωγραφίσουμε

στον καμβά της σκέψης τους.

Όταν γύρισα στο σπίτι...έβαλα φτερά στην φαντασία μου.

Γιάννης Δογραματζάκης