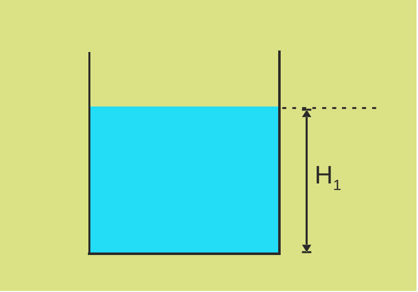
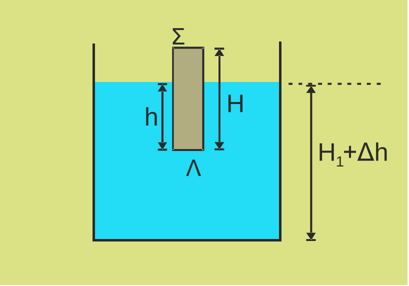
Ένας κύλινδρος ισορροπεί στο νερό



Το δοχείο του σχήματος έχει οριζόντια διατομή A_1 και περιέχει νερό πυκνότητας ρ και ύψους H_1.
α. να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νερό στον πυθμένα του δοχείου.

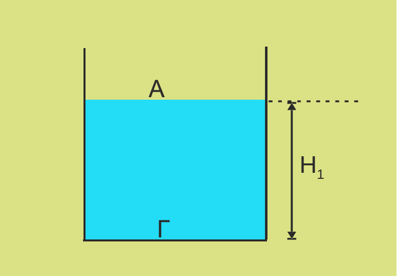
Κυλινδρικό σώμα Σ μάζας Μ, πυκνότητας ρ_Σ, οριζόντιας διατομής Α και ύψους Η τοποθετείται στο δοχείο, οπότε ισορροπεί βυθισμένο κατά h, όπως φαίνεται στο σχήμα.



β. να υπολογίσετε την πίεση στο σημείο Λ του νερού που είναι σε επαφή με το σώμα Σ
γ. να αποδείξετε ότι η άνωση που δέχεται το σώμα Σ, έχει μέτρο ίσο με το βάρος του νερού, που το σώμα Σ εκτοπίζει
δ. να υπολογίσετε την τιμή του λόγου $\frac{h}{H}$
ε. να υπολογίσετε την ανύψωση Δh της στάθμης του νερού στο δοχείο, λόγω της τοποθέτησης του σώματος Σ
στ. να αποδείξετε ότι το μέτρο της δύναμης, που ασκεί το νερό στον πυθμένα του δοχείου, αυξήθηκε κατά $M\cdot g$

Δίνεται η τιμή της ατμοσφαιρικής πίεσης P_{ATM} και το μέτρο της επιτάχυνσης βαρύτητας g.

Απάντηση



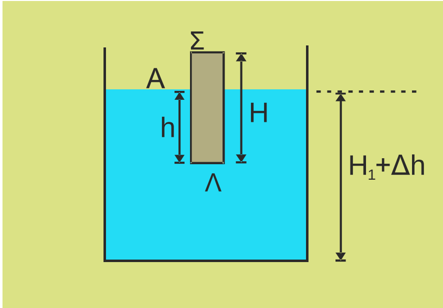
α. Εφαρμόζουμε το νόμο υδροστατικής μεταξύ ενός σημείου Α στην επιφάνεια του νερού και ενός σημείου Γ στον πυθμένα του δοχείου

$$P_\Gamma - P_A = \rho\cdot g\cdot H_1 \xrightarrow{P_A=P_{ATM}} P_\Gamma = P_{ATM} + \rho\cdot g\cdot H_1 \quad (1)$$

Όμως αν $F_{\pi\upsilon\theta\mu}$ είναι το μέτρο της δύναμης που ασκεί το νερό στον πυθμένα του δοχείου, τότε

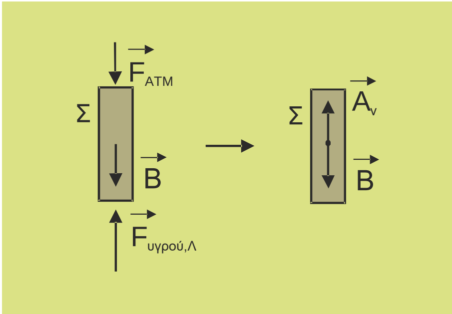
$$P_\Gamma = \frac{F_{\pi\upsilon\theta\mu}}{A_1} \rightarrow F_{\pi\upsilon\theta\mu} = P_\Gamma\cdot A_1 \xrightarrow{(1)} F_{\pi\upsilon\theta\mu} = (P_{ATM} + \rho\cdot g\cdot H_1)\cdot A_1 \quad (2)$$

β. Εφαρμόζουμε το νόμο υδροστατικής μεταξύ του σημείου Α στην επιφάνεια του νερού και του σημείου Λ



$$P_\Lambda - P_A = \rho \cdot g \cdot h \xrightarrow{P_A = P_{ATM}} P_\Lambda = P_{ATM} + \rho \cdot g \cdot h \quad (3)$$

γ. Το σώμα Σ δέχεται το βάρος του $\vec{B}$, την δύναμη $\vec{F}_{ATM}$ από την ατμόσφαιρα και την δύναμη $\vec{F}_{\upsilon\gamma\rho o\acute{\upsilon},\Lambda}$ από το νερό. Η συνισταμένη των $\vec{F}_{\upsilon\gamma\rho o\acute{\upsilon},\Lambda}$ και $\vec{F}_{ATM}$ είναι η άνωση $\vec{A}_\nu$



$$A_\nu = F_{\upsilon\gamma\rho o\acute{\upsilon},\Lambda} - F_{ATM} \rightarrow A_\nu = P_\Lambda \cdot A - P_{ATM} \cdot A \xrightarrow{(3)}$$
$$\rightarrow A_\nu = (P_{ATM} + \rho \cdot g \cdot h) \cdot A - P_{ATM} \cdot A \rightarrow$$
$$\rightarrow A_\nu = \rho \cdot g \cdot h \cdot A \rightarrow A_\nu = \rho \cdot g \cdot V_{\beta\upsilon\theta} \quad (4)$$

όπου $V_{\beta\upsilon\theta}$ ο όγκος του βυθισμένου τμήματος του σώματος Σ, ίσος με τον όγκο $V_{\varepsilon\kappa\tau}$ του νερού που εκτοπίστηκε. Έτσι

$$A_\nu = \rho \cdot g \cdot V_{\varepsilon\kappa\tau} \rightarrow A_\nu = m_{\varepsilon\kappa\tau} \cdot g \rightarrow A_\nu = B_{\varepsilon\kappa\tau}$$

Δηλαδή η άνωση είναι ίση κατά μέτρο με το βάρος του εκτοπιζόμενου, από το σώμα Σ, νερού.

δ. Το σώμα Σ ισορροπεί, επομένως

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow A_\nu - B = 0 \xrightarrow{(4)} \rho \cdot g \cdot V_{\beta\upsilon\theta} = M \cdot g \xrightarrow{M = \rho_\Sigma \cdot V = \rho_\Sigma \cdot A \cdot H}$$
$$\rightarrow \rho \cdot A \cdot h = \rho_\Sigma \cdot A \cdot H \rightarrow \frac{h}{H} = \frac{\rho_\Sigma}{\rho}$$

Προφανώς είναι $\rho_\Sigma < \rho$, οπότε $h < H$.

ε. Ο όγκος του νερού που εκτοπίστηκε από το σώμα Σ, αύξησε τη στάθμη του νερού στο δοχείο κατά Δh. Επομένως

$$V_{\varepsilon\kappa\tau} = V_{\alpha\nu\acute{\upsilon}\psi\omega\sigma\eta\varsigma} \rightarrow A \cdot h = A_1 \cdot \Delta h \rightarrow \Delta h = \frac{A \cdot h}{A_1} \quad (5)$$

στ. Εφαρμόζουμε ξανά το νόμο υδροστατικής μεταξύ του σημείου Α στην επιφάνεια του νερού και του σημείου Γ στον πυθμένα του δοχείου

$$P'_\Gamma - P_A = \rho \cdot g \cdot (H_1 + \Delta h) \xrightarrow{P_A = P_{ATM}} P'_\Gamma = P_{ATM} + \rho \cdot g \cdot (H_1 + \Delta h) \quad (6)$$

Όμως

$$P'_{\Gamma}=\frac{F'_{\pi\upsilon\theta\mu}}{A_1}\rightarrow F'_{\pi\upsilon\theta\mu}=P'_{\Gamma}\cdot A_1\xrightarrow{(6)}F'_{\pi\upsilon\theta\mu}=[P_{ATM}+\rho\cdot g\cdot(H_1+\Delta h)]\cdot A_1 \quad (7)$$

Έτσι για τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης, που ασκεί το νερό στον πυθμένα του δοχείου θα ισχύει

$$\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=F'_{\pi\upsilon\theta\mu}-F_{\pi\upsilon\theta\mu}\xrightarrow{(2),(7)}\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=[P_{ATM}+\rho\cdot g\cdot(H_1+\Delta h)]\cdot A_1-(P_{ATM}+\rho\cdot g\cdot H_1)\cdot A_1\rightarrow$$
$$\rightarrow\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=\rho\cdot g\cdot\Delta h\cdot A_1\xrightarrow{(5)}\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=\rho\cdot g\cdot A\cdot h\rightarrow\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=\rho\cdot g\cdot V_{\beta\upsilon\theta}\xrightarrow{(4)}$$
$$\rightarrow\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=A_{\nu}\xrightarrow{\text{ισορροπία }\Sigma}\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=B\rightarrow\Delta F_{\pi\upsilon\theta\mu}=M\cdot g$$

Παπάζογλου Αποστόλης