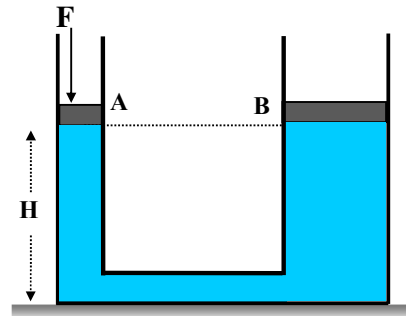


**Ενεργειακές μετατροπές σε έναν υδραυλικό ανυψωτήρα.**

Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται ένας υδραυλικός ανυψωτήρας που περιέχει νερό. Ο υδραυλικός ανυψωτήρας φέρει δύο έμβολα Α και Β κυλινδρικού σχήματος με διατομές,  $A_1=10\text{cm}^2$  και  $A_2=40\text{cm}^2$  και μάζες  $m_1=1\text{kg}$  και  $m_2=10\text{kg}$  αντίστοιχα. Τα έμβολα ισορροπούν στο ίδιο ύψος  $H$  με τη βοήθεια δύναμης  $F$  που ασκείται στο έμβολο Α.



Σχήμα 1

i. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης  $F$ .

Κατόπιν αρχίζουμε να κατεβάζουμε το έμβολο Α μεταβάλλοντας τη δύναμη  $F$  με τέτοιο τρόπο ώστε τα έμβολα να κινούνται πολύ αργά σχεδόν με μηδενική ταχύτητα ώστε σε κάθε θέση να θεωρείται ότι ισορροπούν. Αν το έμβολο Α κατεβαίνει κατά  $y_1=40\text{cm}$  από την αρχική του θέση τότε:

ii. Να γράψετε την εξίσωση της δύναμης  $F$  σε συνάρτηση της μετακίνησης  $y_1$  του εμβόλου Α.

iii. Να βρείτε το έργο της δύναμης  $F$  και να το συσχετίσετε με τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας των μαζών του εμβόλου και της μάζας του νερού.

iv. Να βρείτε το συνολικό έργο των δυνάμεων που ασκούν τα έμβολα στη μάζα του νερού, (έργο περιβάλλοντος) και να το συσχετίσετε με τη μεταβολή της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας του.

Δίνεται η πίεση της ατμόσφαιρας  $p_{\text{atm}}=10^5\text{Pa}$ , η πυκνότητα του νερού  $\rho_v=10^3\text{ kg/m}^3$  και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $|\vec{g}|=10\text{ m/s}^2$ .

**Απάντηση**

i)

Από την ισορροπία του εμβόλου Α προκύπτει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \xrightarrow{(+)\downarrow} F_{1,\text{atm}} + F + w_1 - F_1 = 0 \rightarrow$$

$$\frac{F_{1,\text{atm}}}{A_1} + \frac{F}{A_1} + \frac{w_1}{A_1} - \frac{F_1}{A_1} = 0 \rightarrow$$

$$P_1 = P_{\text{atm}} + \frac{F}{A_1} + \frac{w_1}{A_1} \quad (1)$$

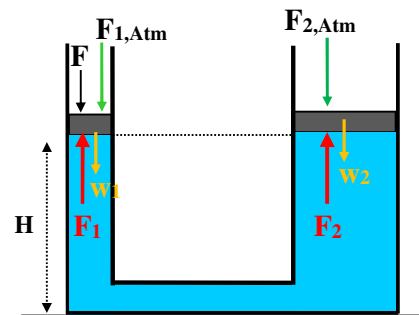
Από την ισορροπία του εμβόλου Β προκύπτει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \xrightarrow{(+)\downarrow} F_{2,\text{atm}} + w_2 - F_2 \rightarrow$$

$$\frac{F_{2,\text{atm}}}{A_2} + \frac{w_2}{A_2} - \frac{F_2}{A_2} = 0 \rightarrow$$

$$P_2 = P_{\text{atm}} + \frac{w_2}{A_2} \quad (2)$$

Οι πιέσεις  $P_1$  και  $P_2$  είναι ίσες.



Σχήμα 2

$$P_1 = P_2 \rightarrow P_{atm} + \frac{F}{A_1} + \frac{w_1}{A_1} = P_{atm} + \frac{w_2}{A_2} \rightarrow \frac{F}{A_1} + \frac{w_1}{A_1} = \frac{w_2}{A_2} \rightarrow$$

$$F = \frac{w_2}{A_2} A_1 - w_1 \rightarrow$$

$$\underline{F = 15N}$$

ii)

Έστω μια τυχαία θέση που το έμβολο Α έχει κατέβει κατά  $y_1$  το έμβολο Β έχει ανέβει κατά  $y_2$ . Όση ποσότητα νερού εκτοπίζει το έμβολο Α στο αριστερό σκέλος τότε μεταφέρεται στο δεξί σκέλος. Επιπλέον επειδή το νερό θεωρείται ασυμπίεστο δηλαδή  $\rho = \text{σταθερή}$  προκύπτει:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \rightarrow \rho \cdot \Delta V_1 = \rho \cdot \Delta V_2 \rightarrow \Delta V_1 = \Delta V_2 \rightarrow A_1 \cdot y_1 = A_2 \cdot y_2 \rightarrow y_1 = 4y_2 \quad (3)$$

Έμβολο Β.

Από την ισορροπία του εμβόλου Β προκύπτει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \xrightarrow{(+)\downarrow} F_{2,atm} + w_2 - F_2 \rightarrow \frac{F_{2,atm}}{A_2} + \frac{w_2}{A_2} - \frac{F_2}{A_2} = 0 \rightarrow P_2 = P_{atm} + \frac{w_2}{A_2} \quad (4)$$

Από την ισορροπία του εμβόλου Α προκύπτει:

$$\Sigma \vec{F}_y = \vec{0} \xrightarrow{(+)\downarrow} F_{1,atm} + F + w_1 - F_1 = 0 \rightarrow$$

$$F + P_{atm} A_1 + w_1 - P_1 A_1 = 0 \rightarrow$$

$$F = (P_1 - P_{atm}) A_1 - w_1 \quad (5)$$

Στην οριζόντια ευθεία που περνά από το έμβολο Α όλα τα σημεία του ρευστού έχουν την ίδια πίεση.

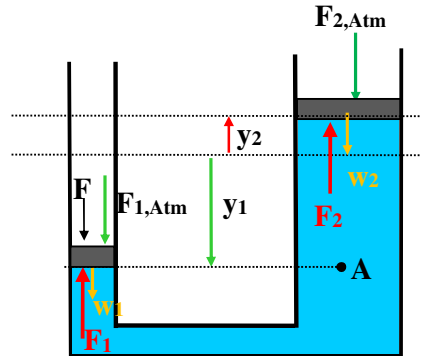
$$P_1 = \rho \cdot g(y_1 + y_2) + P_2 \xrightarrow{(4)} \rightarrow$$

$$P_1 = \rho \cdot g(y_1 + y_2) + P_{atm} + w_2/A_2 \quad (6)$$

$$H (5) \xrightarrow{(6)} F = \rho \cdot g(y_1 + y_2) A_1 + \frac{w_2 A_1}{A_2} - w_1 \xrightarrow{(3)} \rightarrow$$

$$F = \rho \cdot g(y_1 + \frac{y_1}{4}) A_1 + \frac{w_2 A_1}{A_2} - w_1 \rightarrow F = 10^3 \cdot 10(1 + \frac{1}{4}) 10 \cdot 10^{-4} y_1 + \frac{100}{4} - 10 \rightarrow$$

$$F = 12,5 \cdot y_1 + 15, \quad 0 \leq y_1 \leq 0,4m \quad , S.I. \quad (7)$$



Σχήμα 3

iii)

Το έργο της δύναμης  $F$  θα βρεθεί από το εμβαδό της συνάρτησης της δύναμης  $F$  σε συνάρτηση της θέσης  $y_1$ .

$$W_F = E_{\text{τραπ.}} = 7J$$

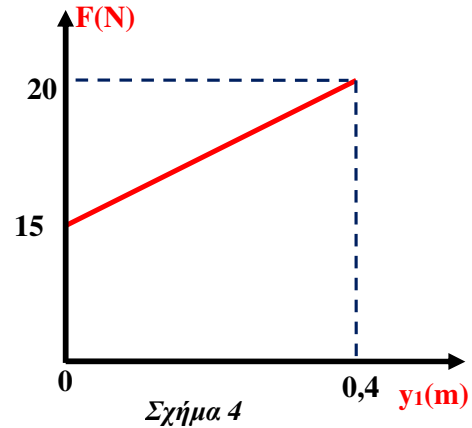
Η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος του νερού και των εμβόλων με επίπεδο αναφοράς την οριζόντια ευθεία που περνά από την τελική θέση του εμβόλου Α είναι:

$$U_{\text{αρχ.}} = m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_1 + \Delta m_1 \cdot g \cdot y_1 / 2 + U_{\text{υπόλοιπου, νερού}} \quad (8)$$

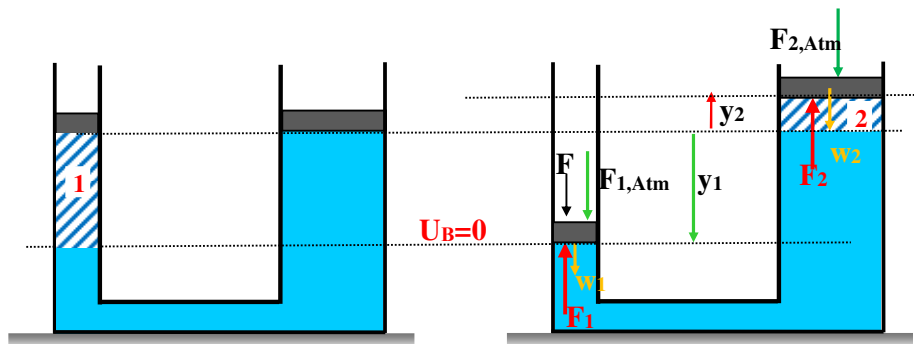
Όπου:

Η ποσότητα  $\Delta m_1 \cdot g \cdot y_1 / 2$  είναι η αρχική βαρυτική δυναμική ενέργεια της ποσότητας νερού που εκτοπίζει το έμβολο 1. Το κέντρο μάζας της απέχει από το επίπεδο αναφοράς  $y_1 / 2 = 0.2m$  και

$U_{\text{υπόλοιπου, νερού}}$  είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια της υπόλοιπης ποσότητας νερού, δηλαδή της ποσότητας νερού που είναι σχεδιασμένη με μπλε χρώμα στο σχήμα 5. Το τμήμα αυτό αλληλεπικαλύπτεται κατά τη μετακίνηση του εμβόλου και δεν μεταβάλλεται η δυναμική του ενέργεια.



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Η τελική βαρυτική δυναμική ενέργεια του συστήματος γράφεται:

$$U_{\text{τελ.}} = m_2 \cdot g \cdot (y_1 + y_2) + \Delta m_2 \cdot g \cdot (y_1 + y_2) / 2 + U_{\text{υπόλοιπου, νερού}} \quad (9)$$

Όπου:

Η ποσότητα  $\Delta m_2 \cdot g \cdot (y_1 + y_2) / 2$  είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια της ποσότητας του νερού που εμφανίζεται ως μεταφερόμενη στο δεξί σκέλος του σωλήνα. Το κέντρο μάζας της απέχει από το επίπεδο αναφοράς  $y_1 + y_2 / 2 = 0,45m$  και

Λαμβάνοντας ότι  $\Delta m_1 = \Delta m_2 = \Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A_1 \cdot y_1 = 0,4kg$ .

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_{\text{τελ.}} - U_{\text{αρχ.}} = m_2 \cdot g \cdot y_2 - m_1 \cdot g \cdot y_1 + \Delta m \cdot g \cdot (y_1 + y_2) / 2 \rightarrow \\ \Delta U &= [10 \cdot 10 \cdot 0,1 - 1 \cdot 10 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 10 \cdot 0,25] J \rightarrow \\ \Delta U &= [10 - 4 + 1] J \rightarrow \\ \Delta U &= 7J \end{aligned}$$

Δηλαδή η ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης  $F$  μεταφέρεται στο σύστημα του νερού και των εμβόλων και εμφανίζεται ως αύξηση δυναμικής βαρυτικής ενέργειας.

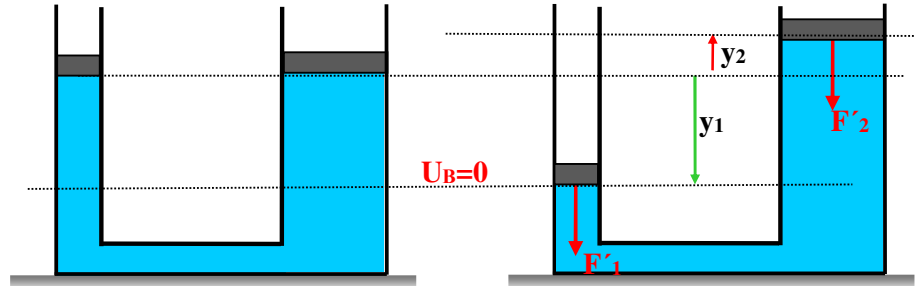
Η συνολική δράση της ατμόσφαιρας είναι μηδενική.

Το έργο της στο αριστερό έμβολο  $A$  είναι θετικό και ίσο με  $WF_{1atm}=F_{1,atm} \cdot y_1=P_{atm}A_1 \cdot y_1=10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 0,4J=40J$

Το έργο της στο δεξί έμβολο  $B$  είναι αρνητικό και ίσο με  $WF_{2atm}=-F_{2,atm} \cdot y_2=-P_{atm}A_2 \cdot y_2=-10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot 0,1J=-40J$

iv)

Στο αριστερό σκέλος του νερού ασκείται η αντίδραση της  $F_1$  η  $F'_1$ .



Σχήμα 6

Από τη σχέση (6)  $P_1=\rho \cdot g(y_1+y_2)+P_{atm}+w_2/A_2$  προκύπτει:

$$F_1=\rho \cdot g(y_1+y_2)A_1+P_{atm}A_1+w_2 \cdot A_1/A_2 \rightarrow$$

$$F_1=\rho \cdot g \cdot (y_1 + \frac{y_1}{4}) A_1+P_{atm}A_1+w_2 \cdot A_1/A_2 \rightarrow$$

$$F_1=10^3 \cdot 10 \cdot (y_1 + \frac{y_1}{4}) 10 \cdot 10^{-4}+10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}+100/4 \rightarrow$$

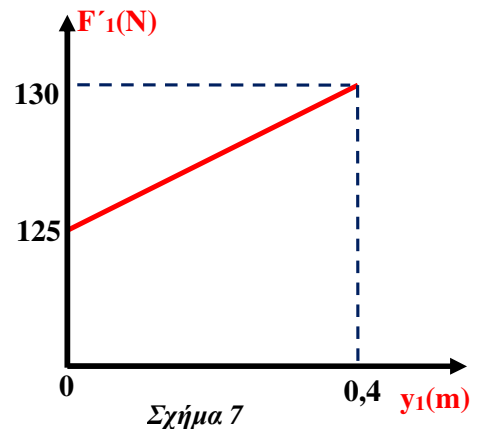
$$F_1=12,5 \cdot y_1+100+100/4 \rightarrow$$

$$F_1=12,5 \cdot y_1+125, \quad 0 \leq y_1 \leq 0,4m$$

$$\text{Άρα } |F'_1|=12,5 \cdot y_1+125, \quad 0 \leq y_1 \leq 0,4m$$

$$W_{F'1}=51J.$$

Το έργο της δύναμης  $F'_1$  που ασκείται στο νερό είναι θετικό.



Σχήμα 7

Από την ισορροπία του εμβόλου  $B$  προκύπτει:

$$P_2 = P_{atm} + \frac{w_2}{A_2} \rightarrow F_2 = P_{atm}A_2 + w_2 \rightarrow F_2 = 10^5 \cdot 40 \cdot 10^{-4} + 100 \rightarrow F_2 = 500N$$

Αντίστοιχα η δύναμη  $F'_2$  θα έχει μέτρο  $|F'_2| = |F_2| = 500N$

Και το έργο της επί του νερού θα είναι αρνητικό και ίσο με:

$$W_{F'2} = -F_2' \cdot y_2 = -500 \cdot 0,1 \text{J} \rightarrow W_{F'2} = -50 \text{J}$$

$$WF_{\text{περ}} = W_{F'1} + W_{F'2} = 1 \text{J}$$

$$\Delta U_{\text{βαρ, υγρού}} = \Delta m \cdot g \cdot (y_1 + y_2) / 2 = 0,4 \cdot 10 \cdot (0,4 + 0,1) / 2 \text{ J} = 1 \text{J}$$

Το έργο των δυνάμεων του περιβάλλοντος επί όλης της μάζας του νερού γίνεται αύξηση της βαρυτικής δυναμικής του ενέργειας.

### Σχόλιο

1. Ας εξετάσουμε τις ενεργειακές μετατροπές σε κάθε έμβολο.

#### Έμβολο Α

Τα έργα των δυνάμεων είναι:

$$WF_{1\text{atm}} = +40 \text{J}$$

$$WF = +7 \text{J}$$

$$WF_1 = -51 \text{J}$$

$$W_{w1} = +m_1 \cdot g \cdot y_1 = +4 \text{J}$$

Η δύναμη της ατμόσφαιρας προσφέρει ενέργεια 40J κατά την κίνηση του εμβόλου, η δύναμη F προσφέρει 7J και η δύναμη του βάρους μέσω του έργου της 4J. Η δύναμη F<sub>1</sub> αφαιρεί 51J και το έμβολο κινείται με σταθερή ταχύτητα σχεδόν μηδενική και καθώς κατεβαίνει ελαττώνεται η βαρυτική δυναμική του ενέργεια κατά 4J.

#### Έμβολο Β

Τα έργα των δυνάμεων είναι:

$$WF_{2\text{atm}} = -40 \text{J}$$

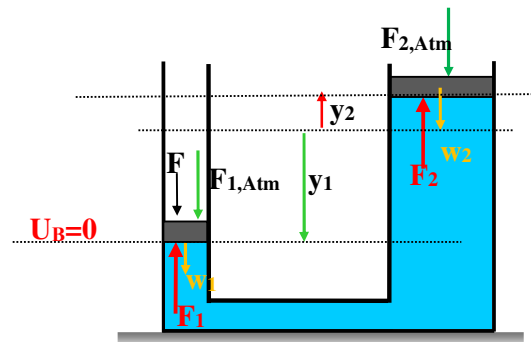
$$WF_2 = +50 \text{J}$$

$$W_{w2} = -m_2 \cdot g \cdot y_2 = -10 \text{J}$$

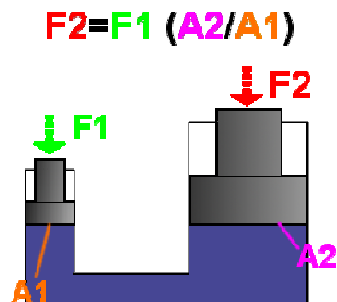
Η δύναμη F<sub>2</sub> προσφέρει ενέργεια 50J ενώ η ατμόσφαιρα αφαιρεί τα 40J και τα 10J καταναλώνονται μέσω του έργου του βάρους καθώς ανυψώνεται το έμβολο και αυξάνεται τελικά η βαρυτική δυναμική του ενέργεια.

2. Πολλές φορές στον υδραυλικό ανυψωτήρα λανθασμένα κατά την κίνηση των εμβόλων εφαρμόζεται η αρχή του Pascal, που είναι λάθος καθώς δεν υπάρχει ισορροπία κατά την κίνηση.

Η γνωστή σχέση  $F_2 = F_1 (A_2/A_1)$  που αναφέρεται συχνά στο υδραυλικό πιεστήριο και πολλοί επικαλούνται την αρχή του Pascal, προκύπτει αν τα έμβολα ισορροπούν στο ίδιο



Σχήμα 8



οριζόντιο επίπεδο και είναι αβαρή ή οι δυνάμεις  $F_1$  ή  $F_2$  να ήταν τα βάρη σωμάτων, εμβόλων κτλ.

Αναλυτικά, αν τα έμβολα είναι αβαρή και στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, τότε αν ασκήσουμε δεξιά και αριστερά δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  αντίστοιχα προκύπτει:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \rightarrow \\ F_1/A_1 + P_{atm} &= F_2/A_2 + P_{atm} \rightarrow \\ F_1/A_1 &= F_2/A_2 \end{aligned}$$

Αν αντίστοιχα τα έμβολα ισορροπούσαν σε διαφορετικά ύψη δεν προκύπτει αυτή η σχέση, οπότε χρήζει προσοχή ο τρόπος που αναφέρεται και χρησιμοποιείται.