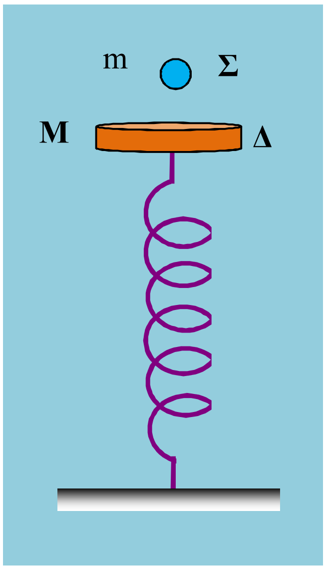
Κρούση και φθίνουσα ταλάντωση



Ο δίσκος Δ του σχήματος, έχει μάζα $M = 4kg$ και ισορροπεί σε ηρεμία δεμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$ που έχει το κάτω του άκρο ακλόνητο.
Μικρό σφαιρίδιο Σ μάζας $m = 2kg$, κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και σφηνώνεται ακαριαία στο δίσκο , έχοντας κατά την στιγμή που ακουμπά σ' αυτόν ταχύτητα μέτρου $\upsilon_o = 3m/s$.
Το συσσωμάτωμα που προκύπτει αρχίζει αμέσως μετά την κρούση , τη χρονική στιγμή $t_o = 0$, να εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με $D = k$ και υπό την επίδραση δύναμης απόσβεσης της μορφής $F_{\alpha\pi} = -b\upsilon$, όπου b η σταθερά απόσβεσης και υ η αλγεβρική τιμή της στιγμιαίας ταχύτητάς του.
Κάποια χρονική στιγμή t_1 το συσσωμάτωμα διέρχεται από σημείο Ζ που βρίσκεται σε απόσταση $d = 0{,}2m$ κάτω από τη θέση που έγινε η κρούση, κινούμενο προς τα επάνω με επιτάχυνση $\alpha_1 = +3\ m/s^2$.
Αν στη χρονική διάρκεια $t_1 - t_o$ το σύστημα έχει χάσει το 56,25% από την ενέργεια της ταλάντωσης που είχε τη χρονική στιγμή $t_o = 0$, να υπολογίσετε:

i. Τη μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου από την χρονική στιγμή $t_o = 0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1.
ii. Τη δύναμη απόσβεσης τη χρονική στιγμή t_1 , και τη σταθερά απόσβεσης b.
iii. Το έργο της συνισταμένης των δυνάμεων στη διεύθυνση της κίνησης, και το έργο της δύναμης επαναφοράς από τη χρονική στιγμή $t = t_o$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t = t_1$.
iv. Αν $\dot{K} = \dfrac{dK}{dt}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος τη χρονική στιγμή $t = t_o$, και $\dot{U}_\tau = \dfrac{dU_\tau}{dt}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας λόγω ταλάντωσης την ίδια χρονική στιγμή, να υπολογίσετε τη τιμή του λόγου $\dfrac{\dot{K}}{\dot{U}_\tau}$.

Δίνεται $g = 10\ m/s^2$ και για τις αλγεβρικές τιμές των μεγεθών , θετική φορά η κατακόρυφη προς τα επάνω.

Απάντηση

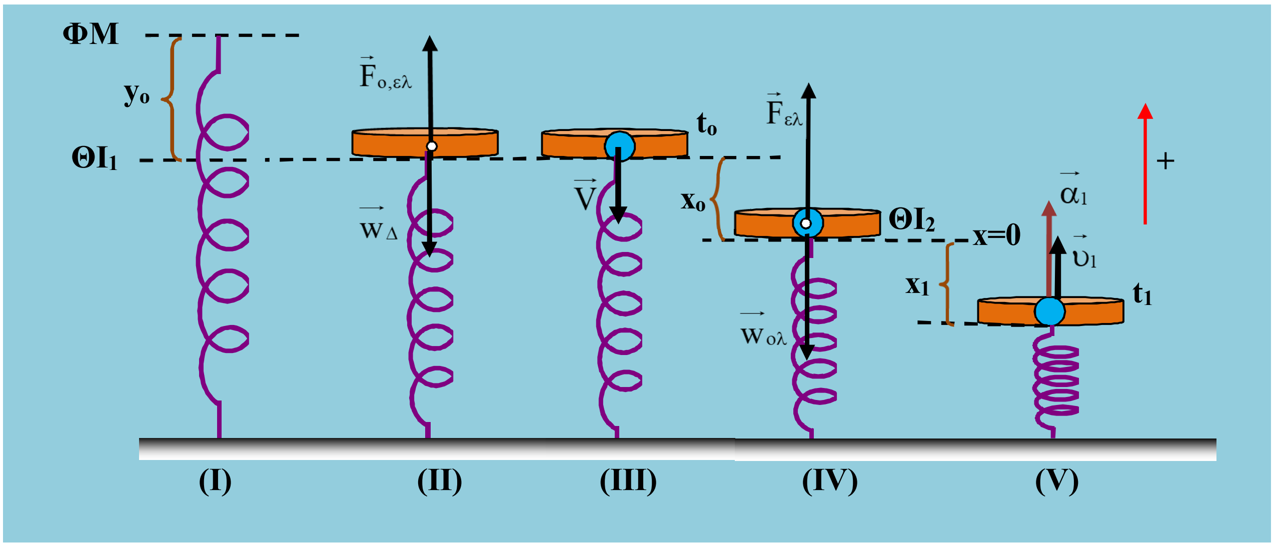
i. Για τη μεταβολή της ορμής του σφαιριδίου ισχύει ότι

$$\Delta\vec{p}_\Sigma = m\vec{\upsilon}_1 - m\vec{V} \quad ή \quad \Delta p_\Sigma = m\upsilon_1 - mV \ (1)$$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση έχουμε ότι

$$m\vec{\upsilon}_o = (m+M)\vec{V} \quad ή \quad m\upsilon_o = (m+M)V \quad ή \quad V = \frac{m\upsilon_o}{m+M} = \frac{2kg \cdot 3m/s}{6kg} = 1m/s \ (2)$$

Έστω y_o η συσπείρωση του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας του δίσκου ΘΙ$_1$, όπως φαίνεται στο σχήμα ΙΙ. Στη θέση αυτή ισχύει ότι



$$\vec{w}_\Delta + \vec{F}_{o,\varepsilon\lambda} = \vec{0} \text{ ή } w_\Delta = ky_o \text{ ή } y_o = \frac{Mg}{k} = \frac{4kg \cdot 10m/s}{200N/m} = 0,2m \ (3)$$

Το κέντρο της φθίνουσας ταλάντωσης είναι η ΘΙ$_2$ - σχήμα IV - το σημείο δηλαδή που το συσσωμάτωμα ισορροπεί σε ηρεμία. Από το σημείο αυτό τη χρονική στιγμή t_o , το συσσωμάτωμα απέχει κατά x_o και ισχύει ότι

$$\vec{w}_{o\lambda} + \vec{F}_{\varepsilon\lambda} = \vec{0} \text{ ή } (m+M)g = k(y_o+x_o) \text{ ή } y_o+x_o = \frac{(m+M)g}{k} = \frac{6kg \cdot 10m/s}{200N/m} = 0,3m$$

και με βάση την (3) $x_o = 0,1m$ (4)

Εξ άλλου, η ενέργεια E_o της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t_o , θα ισούται με το άθροισμα της δυναμικής ενέργειας λόγω ταλάντωσης και της κινητικής ενέργειας στη θέση αυτή.

Δηλαδή θα είναι

$$E_o = \frac{1}{2}kx_o^2 + \frac{1}{2}(m+M)V^2$$

και με βάση τις (2) , (4) και τα δεδομένα $E_o = \left(\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0,1^2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1^2\right)J = 4J$ (5)

Η ενέργεια E_1 της ταλάντωσης την χρονική στιγμή t_1 με βάση τα δεδομένα υπολογίζεται

$$E_1 = E_o - \frac{56,25}{100}E_o = \frac{43,75}{100}E_o \text{ και με βάση την (5) } E_1 = 1,75J \ (6)$$

Ομοίως για την E_1 θα ισχύει ότι $E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}(m+M)\upsilon_1^2$ (7)

με $|x_1| + x_o = d$ άρα $|x_1| = d - x_o = 0,2m - 0,1m = 0,1m$ (8)

και με βάση τις (6), (7) και (8) προκύπτει $\upsilon_1 = \pm 0,5\frac{m}{s}$ (9)

Από την (1) και με τα αποτελέσματα από τις (2) , (9) και με θετική τη φορά προς τα πάνω προκύπτει ότι

$$\Delta p_\Sigma = 2kg\left(0,5\frac{m}{s} - (-1\frac{m}{s})\right) = +3kg\frac{m}{s} > 0 \text{ άρα } \Delta\vec{p}_\Sigma \uparrow\uparrow \vec{\upsilon}_1$$

ii. Με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα τη χρονική στιγμή t_1 – σχήμα (V) - έχομε ότι

$$\vec{F}_{\varepsilon\pi} + \vec{F}_{\alpha\pi} = (m+M)\vec{\alpha} \quad \text{ή}$$

$$-kx_1 + F_{\alpha\pi} = (m+M)\alpha \text{ ή } F_{\alpha\pi} = (m+M)\alpha + kx_1 = 6kg\cdot\left(+3\frac{m}{s^2}\right) + 200\frac{N}{m}(-0,1)m$$

ή $F_{\alpha\pi} = -2N < 0$ άρα $\vec{F}_{\alpha\pi} \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}_1$ όπως και αναμένεται.

Για τον υπολογισμό της σταθεράς b :

$$F_{\alpha\pi} = -b\upsilon_1 \text{ ή } b = -\frac{F_{\alpha\pi}}{\upsilon_1} = -\frac{(-2N)}{0,5\frac{m}{s}} = 4\frac{kg}{s}$$

iii. Με βάση το θεώρημα έργου ενέργειας για το έργο της συνισταμένης ισχύει ότι:

$$w_{\Sigma F} = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}(M+m)\left(\upsilon_1^2 - V^2\right) = -2,25J$$

Επειδή η δύναμη επαναφοράς είναι συντηρητική το έργο της δίνεται από τη σχέση

$$w_{F_{\varepsilon\pi}} = -\Delta U_\tau = \frac{1}{2}kx_o^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \quad \text{η}$$

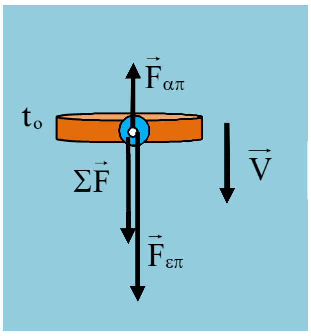
$$w_{F\varepsilon\pi} = \frac{1}{2}200\left(0,1^2 - 0,1^2\right)J = 0$$

iv. Την $t = t_o$ ισχύει ότι

$$\Sigma F = -kx_o - bV = -200\frac{N}{m}(+0{,}1m) - 4\frac{kg}{s}\left(-1\frac{m}{s}\right) \text{ ή}$$

$$\Sigma F = -20N + 4N = -16N < 0 \text{ άρα } \Sigma\vec{F} \uparrow\uparrow \vec{V}$$

όπως στο διπλανό σχήμα.



Όμως είναι

$$\dot{K} = \frac{dK}{dt} = \left|\Sigma\vec{F}\right| \cdot \frac{\left|d\vec{x}\right|}{dt} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \left|\Sigma\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{V}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^o = +16N \cdot 1\frac{m}{s} = +16\frac{J}{s}$$

και $$\dot{U}_\tau = \frac{dU_\tau}{dt} = -\left|\vec{F}_{\varepsilon\pi}\right| \cdot \frac{\left|d\vec{x}\right|}{dt} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = -\left|kx_o\right| \cdot \left|V\right| \cdot \sigma\upsilon\nu 0^0 = -200\frac{N}{m} \cdot 0{,}1m \cdot 1\frac{m}{s} = -20\frac{J}{s}$$

άρα $$\frac{\dot{K}}{\dot{U}_\tau} = \frac{16\frac{J}{s}}{-20\frac{J}{s}} = -0{,}8 \; .$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Μανώλης Δρακάκης