

### Σπρώχνοντας με μια δύναμη το έμβολο

Κατακόρυφο κυλινδρικό δοχείο με εμβαδό βάσης  $A=200\text{cm}^2$ , είναι τοποθετημένο στην άκρη ενός τραπεζιού ύψους  $D=1,8\text{m}$ . Το δοχείο περιέχει νερό το οποίο φτάνει σε ύψος  $H=1\text{m}$  από τη βάση του δοχείου. Στο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου, πολύ κοντά στον πυθμένα του, υπάρχει κυκλική οπή με εμβαδό διατομής  $A_1=1\text{cm}^2$ , η οποία είναι αρχικά κλειστή με τάπα. Το δοχείο στην ελεύθερη επιφάνειά του κλείνεται αεροστεγώς με αβαρές έμβολο. Κάποια χρονική στιγμή που θεωρείται  $t=0$  αφαιρείται η τάπα και ταυτόχρονα ασκείται στο κέντρο του εμβόλου κατάλληλη κατακόρυφη δύναμη  $F$  μεταβλητού μέτρου, ώστε όλο το νερό που εξέρχεται από την οπή να διανύσει την ίδια οριζόντια απόσταση και ίση με  $S=4,8\text{m}$  μέχρι να φτάσει στο έδαφος.

*i.* Να υπολογίσετε το μέτρο της ταχύτητας εκροής του νερού από την οπή, την ταχύτητα που κατεβαίνει το έμβολο και την ταχύτητα που φτάνει το νερό στο έδαφος.

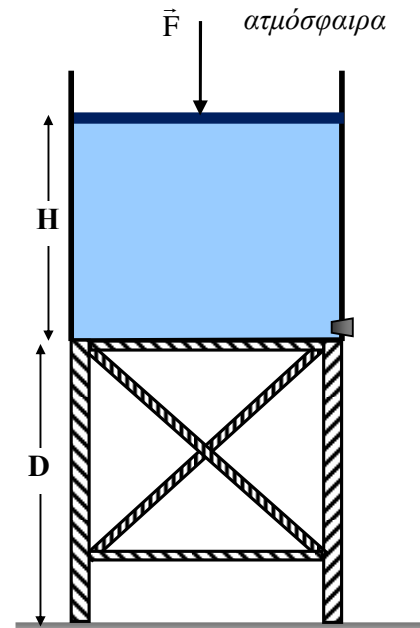
*ii.* Να βρείτε πως μεταβάλλεται η πίεση ακριβώς κάτω από το έμβολο σε συνάρτηση του ύψους  $y$  του νερού που περιέχεται στο δοχείο και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση.

*iii.* Να βρείτε την συνάρτηση του μέτρου της δύναμης  $F$  σε συνάρτηση με τον χρόνο και να γίνει η αντίστοιχη γραφική παράσταση από την στιγμή που αφαιρέθηκε η τάπα μέχρι να αδειάσει ολόκληρο το δοχείο.

*iv.* Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης  $F$  για όλο το χρονικό διάστημα που απαιτείται να εξέλθει το νερό από το δοχείο.

*v.* Πόση είναι αθροιστικά η κινητική ενέργεια όλης της μάζας του νερού την στιγμή που φτάνει στο έδαφος; Πόση θα ήταν αν δεν υπήρχε η δύναμη  $F$ ;

Δίνεται η πίεση της ατμόσφαιρας  $p_{\text{atm}}=10^5\text{Pa}$ , η πυκνότητα του νερού  $\rho_v=10^3\text{ kg/m}^3$  και το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $|\vec{g}|=10\text{ m/s}^2$ . Θεωρήστε το νερό ιδανικό ρευστό και τις τριβές του αέρα αμελητέες. Επίσης θεωρήστε τη ροή στρωτή και μόνιμη. Για τους αριθμητικούς υπολογισμούς θεωρήστε την ποσότητα  $v_{\text{εμβ}}^2 \approx 0$ , όπου  $v_{\text{εμβ}}$  η ταχύτητα του εμβόλου.



Σχήμα 1

**Απάντηση**

i) Ένα στοιχείο ρευστού μόλις εξέρχεται εκτελεί οριζόντια βολή.

Κατακόρυφα διανύει απόσταση ίση με D και  
 ισχύει:  $y = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 \xrightarrow{y=D} \Delta t = \sqrt{\frac{2D}{g}} = 0,6s$

Από το βεληνεκές  
 $S = v_1 \Delta t \rightarrow v_1 = S / \Delta t = 8m/s$

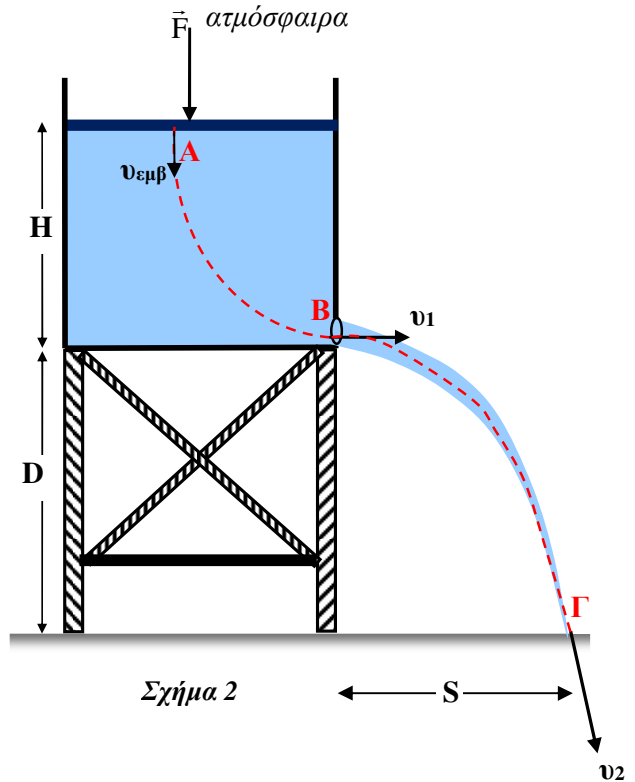
Από την εξίσωση συνέχειας στα σημεία A και B προκύπτει.

$$A v_{εμβ} = A_1 v_1 \rightarrow v_{εμβ} = A_1 v_1 / A = v_1 / 200 = 0,04 m/s.$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής στη φλέβα του νερού που είναι στον αέρα, στη θέση B στην έξοδο του νερού στην ατμόσφαιρα, μέχρι τη θέση Γ που φτάνει στο έδαφος. Επίπεδο αναφοράς ορίζεται η θέση Γ.

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 + \rho_v g D = p_2 + \frac{1}{2} \rho_v v_2^2 \xrightarrow{p_1 = p_2 = p_{atm}}$$

$$\frac{1}{2} v_1^2 + g D = \frac{1}{2} v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gD} = 10m/s$$



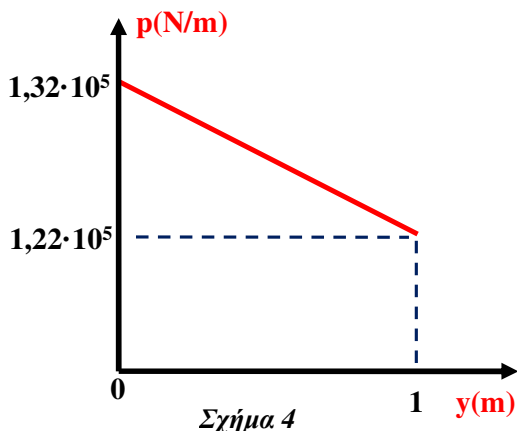
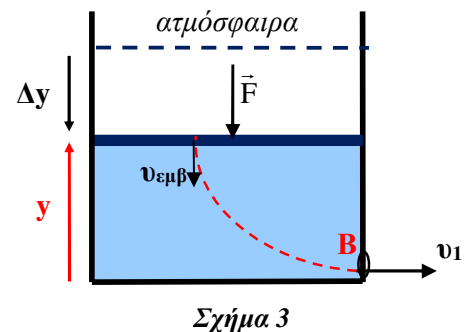
ii) Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος μιας ρευματικής γραμμής από τη θέση ακριβώς κάτω από το έμβολο μέχρι τη θέση (B) στην έξοδο του νερού στην ατμόσφαιρα, έχοντας το έμβολο κατέβει κατά Δy από την αρχική του θέση. Επίπεδο αναφοράς ορίζεται η θέση (B)

$$p_v + \frac{1}{2} \rho_v v_{εμβ}^2 + \rho_v g y = p_1 + \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 \xrightarrow{v_{εμβ} = 0}$$

$$p_v = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g y \Rightarrow$$

$$p_v = 10^5 + 3,2 \cdot 10^4 - 10^4 y,$$

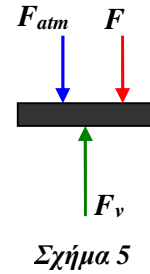
$$p_v = 1,32 \cdot 10^5 - 10^4 y, \quad 0 \leq y \leq 1m$$



iii) Το έμβολο είναι αβαρές και συνεπώς:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0} \xrightarrow{(+)\downarrow} F + F_{atm} - F_v = 0 \rightarrow$$

$$F + p_{atm} A - p_v A = 0 \rightarrow F = A(p_v - p_{atm}) \quad (1)$$



Από το ερώτημα ii) η πίεση ακριβώς κάτω από το έμβολο είναι:

$$p_v = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g y \text{ ενώ αν το έμβολο έχει κατέβει κατά } \Delta y$$

ισχύει  $y = H - \Delta y \rightarrow y = H - v_{εμβ} \cdot t$

και συνεπώς :

$$p_v = p_{atm} + \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H + \rho_v g \cdot v_{εμβ} t \rightarrow p_v - p_{atm} = \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H + \rho_v g \cdot v_{εμβ} t \quad (2)$$

Η (1) γίνεται με τη βοήθεια της (2):

$$F = A \left( \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H + \rho_v g \cdot v_{εμβ} t \right) \text{ από όπου με αντικατάσταση προκύπτει } F = 440 + 8t$$

Ο όγκος του νερού που περιέχει αρχικά το δοχείο είναι:

$$V = A \cdot H = 200 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \text{ m}^3 = 0.02 \text{ m}^3$$

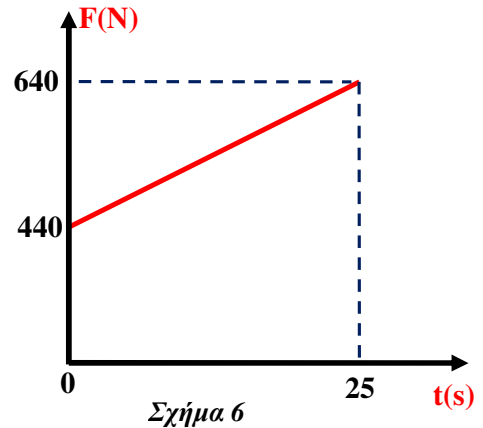
Υπολογίζουμε τη στιγμή που αδειάζει το νερό με τη βοήθεια της παροχής.

$$\text{Από την παροχή } V = \Pi \cdot t_{ολ} \rightarrow V = A_1 \cdot v_1 \cdot t_{ολ} \rightarrow$$

$$t_{ολ} = V / (A_1 \cdot v_1) \rightarrow t_{ολ} = 0,02 / (10^{-4} \cdot 8) \text{ s} \rightarrow$$

$$t_{ολ} = 25 \text{ s}$$

έτσι  $F = 440 + 8t, 0 \leq t \leq 25 \text{ s}$



iv) Θα κάνουμε τη γραφική παράσταση της δύναμης F συνάρτηση με τη μετατόπιση του εμβόλου Δy και από το εμβαδό θα υπολογίσουμε το έργο της δύναμης F.

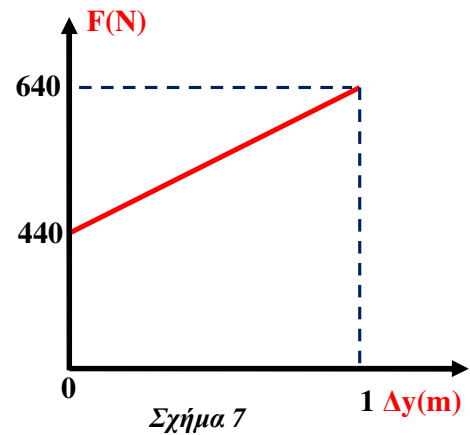
Από τη σχέση

$$F = A \left( \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H + \rho_v g \cdot v_{εμβ} t \right) \xrightarrow{v_{εμβ} t = \Delta y} \rightarrow$$

$$F = A \left( \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H + \rho_v g \cdot \Delta y \right)$$

με αντικατάσταση

$$F = 440 + 200 \cdot \Delta y, \text{ με } 0 \leq \Delta y \leq 1 \text{ m}$$



Το εμβαδό του τραπεζιού ισούται με  $WF = E_{τραπ.} = 540 \text{ J}$

ν) Το κάθε στοιχείο ρευστού όταν φτάνει στο έδαφος έχει κινητική ενέργεια  $K_i = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_2^2$ .

Η συνολική κινητική ενέργεια όλης της μάζας του νερού ισούται με το άθροισμα όλων των κινητικών ενεργειών των στοιχείων του ρευστού.

$$\begin{aligned} K_{ολ} &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot v_2^2 + \dots \rightarrow \\ K_{ολ} &= \frac{1}{2} \cdot v_2^2 [m_1 + m_2 + m_3 + \dots] \rightarrow \\ K_{ολ} &= \frac{1}{2} M_{ολ} \cdot v_2^2 \rightarrow \\ K_{ολ} &= \frac{1}{2} \cdot \rho_v \cdot V \cdot g \cdot v_2^2 \rightarrow \\ K_{ολ} &= \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 0,02 \cdot 10 \cdot 10^2 \text{ J} \rightarrow \\ K_{ολ} &= \mathbf{1000 \text{ J}} \end{aligned}$$

Η από την ΑΔΕ

$$\begin{aligned} E_{Μηχαρχ} + E_{προσφ} - |E_{Απόλ}| &= E_{Μηχ,τελ} \rightarrow \\ U_{Βαρ,αρχ} + WF &= K_{τελ} \rightarrow \\ Mg(D+H/2) + WF &= K_{τελ} \rightarrow \\ 460\text{J} + 540\text{J} &= K_{τελ} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας η τελική κινητική ενέργεια ισούται με το άθροισμα της αρχικής μηχανικής ενέργεια του νερού, που αρχικά είναι μόνο βαρυτική δυναμική ίση με  $U_{βαρ} = Mg(D+H/2) = 460\text{J}$  και της προσφερόμενης ενέργειας από τη δύναμη  $F$  μέσω του έργου της ίση με  $WF = 540\text{J}$ .

Έτσι εάν δεν υπήρχε η δύναμη  $F$  και επειδή το πεδίο δυνάμεων είναι συντηρητικό η τελική κινητική ενέργεια θα ισούταν με την αρχική βαρυτική δυναμική δηλ.  $K'_{ολ} = 460\text{J}$ .

### Παρατήρηση

Καθώς το νερό εξέρχεται από την οπή το μέτρο της δύναμης πρέπει να αυξάνεται. Αυτό είναι λογικό γιατί καθώς εξέρχεται μάζα νερού και ελαττώνεται το ύψος της στήλης του νερού στο δοχείο, για να μην αλλάξει η ταχύτητα εκροής και να μένει ίδιο το βεληνεκές, θα πρέπει η πίεση ακριβώς κάτω από το έμβολο να αυξάνεται, όπως εύκολα προκύπτει από την εξίσωση Bernoulli και συνεπώς και η δύναμη. Μάλιστα θα πρέπει το μέτρο της δύναμης να αυξάνεται αριθμητικά όσο και το βάρος της εξερχόμενης μάζας νερού δηλ. να «αναπληρώνει» το βάρος του εκρεόμενου νερού.

$$F = A \left( \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H + \rho_v g \cdot \Delta y \right) \rightarrow F = A \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H \cdot A + \rho_v g \cdot \Delta y \cdot A \xrightarrow{\Delta y \cdot A = \Delta V_{εξ}} \rightarrow$$

$$F = A \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H \cdot A + \rho_v g \cdot \Delta V_{εξ} \rightarrow F = A \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H \cdot A + \Delta m_{εξ} \cdot g \rightarrow$$

$$F = A \frac{1}{2} \rho_v v_1^2 - \rho_v g H \cdot A + w_{εξ}$$

X. Αγριόδημας  
[chagriodimas@yahoo.gr](mailto:chagriodimas@yahoo.gr)  
[chagriodimas@gmail.com](mailto:chagriodimas@gmail.com)