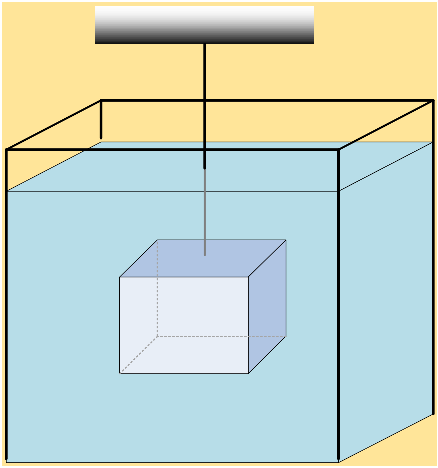
Δυνάμεις στις πλευρές του κύβου



Ένα σώμα κυβικού σχήματος με ακμή α=0,5m και βάρους w=2.000N βυθίζεται σε μια μεγάλη δεξαμενή νερού, δεμένο στο κάτω άκρο ενός νήματος, το οποίο έχει προσδεθεί σε σταθερό σημείο, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα η πάνω βάση του κύβου να είναι οριζόντια. Αν η βάση αυτή δέχεται δύναμη μέτρου F_1=28.000N, να υπολογιστούν:

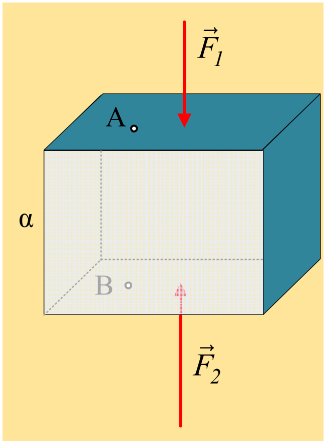
i) Η δύναμη που το νερό ασκεί στην κάτω βάση του κύβου.

ii) Το μέτρο της δύναμης που ασκείται από το νερό σε μια παράπλευρη έδρα του κύβου.

iii) Η τάση του νήματος, από το οποίο κρέμεται ο κύβος.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2, ενώ δεν είναι γνωστή η ατμοσφαιρική πίεση που επικρατεί στην περιοχή της δεξαμενής!

Απάντηση:



i) Σε όλα τα σημεία της πάνω έδρας του κύβου, επικρατεί η ίδια πίεση, αφού η επιφάνεια είναι οριζόντια. Η πίεση αυτή, ίση και με την πίεση ενός σημείου της επιφάνειας Α είναι ίση:

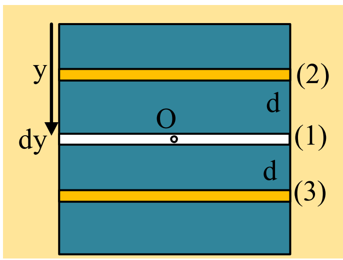
$$p_A = \frac{F}{A} = \frac{F_1}{a^2} = \frac{28.000N}{0,5^2 m^2} = 112.000Pa$$

Αλλά για την διαφορά πίεσης μεταξύ των δύο βάσεων (σημεία Α και Β) ισχύει:

$$p_B - p_A = \rho g y \to p_B = p_A + \rho g a \to$$
$$p_B = 112.000Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot 0,5Pa = 117.000Pa$$

Συνεπώς το νερό ασκεί στην κάτω βάση, κατακόρυφη δύναμη με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$p_B = \frac{F_2}{A} \to F_2 = p_B \cdot a^2 \to$$
$$F_2 = 117.000 \cdot 0,5^2 N = 29.250N$$



ii) Παραπάνω είδαμε ότι στην κάτω βάση του κύβου ασκείται μεγαλύτερη δύναμη, από την δύναμη που ασκείται στην πάνω βάση, αφού βρίσκεται σε μεγαλύτερο βάθος. Αλλά το βάθος που βρίσκεται μια παράπλευρη βάση δεν είναι το ίδιο σε κάθε σημείο της. Θα πρέπει λοιπόν να «εξασφαλίσουμε» σταθερό βάθος για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ιδέες… Αυτό εξασφαλίζεται αν χωρίσουμε σε «φέτες» πάχους dy η καθεμιά, όπως στο σχήμα. Αλλά τότε στην λευκή «φέτα» η οποία απέχει κατά y= ½ α από την άνω βάση (στην οποία ανήκει και το κέντρο Ο της έδρας) ασκείται οριζόντια δύναμη (κάθετη στην επιφάνεια) μέτρου:

$$dF_1 = p_O \cdot dA = \left(p_A + \rho g \frac{a}{2} \right) \cdot ady$$

Αντίθετα σε κάθε μία από τις κίτρινες «φέτες», η μια σε απόσταση d πάνω από το Ο και η δεύτερη σε απόσταση d κάτω από αυτό, ασκείται κάθετα δύναμη:

$$dF_2 = p_{-d} \cdot ady = \left(p_A + \rho g \left(\frac{a}{2} - d \right) \right) \cdot ady \text{ και}$$

$$dF_3 = p_{+d} \cdot ady = \left(p_A + \rho g \left(\frac{a}{2} + d \right) \right) \cdot ady$$

Αλλά από την πρόσθεση των δύο τελευταίων εξισώσεων παίρνουμε:

$$dF_2 + dF_3 = \left(p_A + \rho g \left(\frac{a}{2} - d \right) \right) \cdot ady + \left(p_A + \rho g \left(\frac{a}{2} + d \right) \right) \cdot ady \rightarrow$$

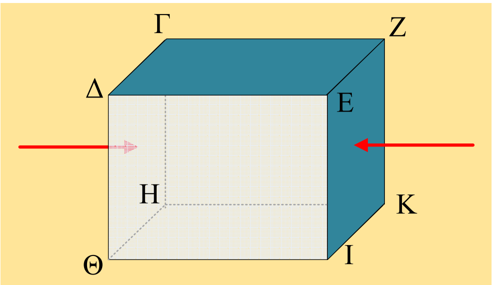
$$dF_2 + dF_3 = 2 \left(p_A + \rho g \frac{\alpha}{2} \right) \cdot ady = 2 \cdot dF_1 \quad (1)$$

Δηλαδή η συνολική δύναμη, είναι ίδια, ωσάν και οι δύο «φέτες» βρισκόταν σε βάθος ίσο με ½ α. Αλλά τότε χωρίζοντας όλη την επιφάνεια σε λεπτές τέτοιες λωρίδες και προσθέτοντας τις αντίστοιχες δυνάμεις, θα έχουμε ότι η συνολική δύναμη που ασκεί το υγρό στην παράπλευρη έδρα, θα διέρχεται από κάποιο σημείο της κατακόρυφης που περνά από το Ο, η οποία συνδέει τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών του ορθογωνίου και θα έχει μέτρο:

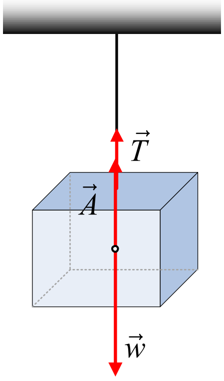
$$F_\pi = p_o \cdot A = \left(p_A + \rho g \frac{a}{2} \right) \cdot A = \left(p_A + \rho g \frac{a}{2} \right) \cdot \alpha^2 \rightarrow$$

$$F_\pi = \left(112.000 + 1.000 \cdot 10 \cdot \frac{0,5}{2} \right) \cdot 0,5^2 N = 28.625 N$$

Σημείωση: Εδώ δεν μας ενδιαφέρει το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης, ας σημειωθεί πάντως ότι δεν είναι το Ο…



iii) Σε κάθε παράπλευρη έδρα του κύβου ασκείται μια, κάθετη στην έδρα, δύναμη μέτρου F_π. Αλλά τότε η συνολική δύναμη στις δύο απέναντι έδρες (ΓΔΘΗ) και (ΕΙΚΖ) θα είναι μηδενική, βλέπε σχήμα. Το ίδιο συμβαίνει και για τις δυνάμεις στις έδρες (ΔΘΙΕ) και (ΓΗΚΖ). Αλλά τότε οι μόνες δυνάμεις που μένει να συνθέσουμε για να βρούμε την συνολική δύναμη που το νερό ασκεί στον κύβο είναι οι δυνάμεις στην άνω και κάτω βάση. Η συνισταμένη αυτή ονομάζεται άνωση, είναι κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω και μέτρο:



$$A = F_2 - F_1 = 29.250N - 28.000N = 1.250N$$

Οπότε από την συνθήκη ισορροπίας του κύβου, θα πάρουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow T+A=w \rightarrow$$

$$T=w-A=2.000N-1.250N=750N$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης