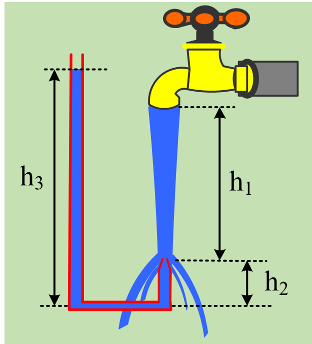
Μετρώντας την ταχύτητα εκροής μιας βρύσης



Στο σχήμα δίνεται μια ανοικτή βρύση συνδεδεμένη στο δίκτυο ύδρευσης, από την οποία τρέχει νερό, με σταθερή παροχή. Μετράμε την διατομή της φλέβας στην έξοδο της βρύσης και την βρίσκουμε $A_1=0,6cm^2$. Σε κατακόρυφη απόσταση $h_1=15cm$ από την έξοδο της βρύσης, τοποθετούμε ένα άδειο σωλήνα, σχήματος αντεστραμμένου Π, όπως στο σχήμα (σωλήνας pitot) και παρατηρούμε ότι το νερό εισέρχεται στο σωλήνα και τελικά ανέρχεται κατά $h_3=25cm$ στο αριστερό σκέλος του, ενώ το δεξιό σκέλος του σωλήνα έχει ύψος $h_2=5cm$.

i) Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί το νερό ανεβαίνει περισσότερο στο αριστερό σκέλος του σωλήνα και $h_3>h_2$;

ii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής και η παροχή της βρύσης.

iii) Να βρεθεί η διατομή της φλέβας, ελάχιστα πριν φτάσει στο σωλήνα.

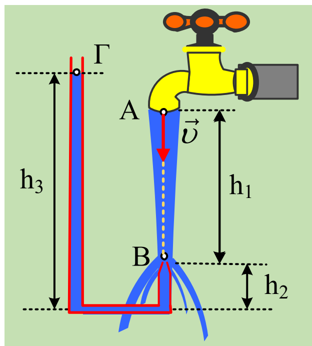
iv) Αν κατεβάσουμε τον σωλήνα διπλασιάζοντας το ύψος h_1, τότε στη νέα θέση, το νερό στο αριστερό σκέλος του σωλήνα, θα φτάσει σε ύψος h_4, όπου:

α) $h_4 < 2h_3$, β) $h_4 = 2h_3$, γ) $h_4 > 2h_3$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Το νερό να θεωρηθεί ιδανικό ρευστό πυκνότητας $\rho=1.000kg/m^3$, $p_{ατμ}=10^5Pa$, ενώ $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Έστω μια ρευματική γραμμή από το σημείο Α, έξοδος βρύσης, μέχρι την είσοδο του σωλήνα, σημείο Β. Το σημείο Β είναι ένα σημείο αποκοπής, δηλαδή ένα σημείο που «αποκόπτεται», σταματά η ροή. Με εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των Α και Β παίρνουμε:

$$p_A + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_B \quad (1) \rightarrow$$

$$p_B = p_{ατ} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 > p_{ατ}$$

Αλλά αφού η πίεση στο Β είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση, είναι μεγαλύτερη και από την πίεση στο σημείο Γ, στην επιφάνεια του νερού στο αριστερό σκέλος του σωλήνα. Αν λάβουμε όμως υπόψη ότι τα σημεία Β και Γ είναι σημεία του ίδιου ακίνητου ρευστού στον σωλήνα θα ισχύει:

$$p_B - p_Γ = \rho g\left(h_3 - h_2\right) \quad (2) \xrightarrow{p_B > p_Γ} h_3 > h_2$$

ii) Με βάση τα παραπάνω, από τις εξισώσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$p_A + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_B \quad \rightarrow p_{ατ} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_{ατ} + \rho g\left(h_3 - h_2\right) \ (3) \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2g\left(h_3 - h_2 - h_1\right)} = \sqrt{2\cdot 10\cdot(0,25-0,05-0,15)}m/s = 1m/s$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης είναι:

$$\Pi = A_1\upsilon = 0,6\cdot 10^{-4}m^2\cdot 1m/s = 6\cdot 10^{-5}m^3/s = 60cm^3/s$$

iii) Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Γ, όπου το Γ ένα σημείο, λίγο πιο πάνω από το Β (πριν υποχρεωθούν τα σωματίδια ρευστού να επιβραδυνθούν και να φτάσουν στο Β με μηδενική ταχύτητα) παίρνουμε:

$$p_A + \rho g y + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \xrightarrow{\delta\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\iota\ \acute{o}\tau\iota\ y\approx h_1}$$

$$p_{\alpha\tau} + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon^2 + 2gh_1} \quad (4)$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{1^2 + 2\cdot 10\cdot 0,15}\ m/s = 2\ m/s$$

Οπότε από την εξίσωση της συνέχειας, αν A_2 η διατομή της φλέβας στο σημείο Γ, θα πάρουμε:

$$A_1\upsilon = A_2\upsilon_\Gamma \rightarrow A_2 = \frac{A_1\upsilon}{\upsilon_\Gamma} = \frac{0,6cm^2\cdot 1m/s}{2m/s} = 0,3cm^2.$$

iv) Αν κατεβάζαμε τον σωλήνα pitot ώστε να βρίσκεται σε απόσταση $h_1' = 2h_1$, από το στόμιο της βρύσης, τότε από την εξίσωση (3), θα παίρναμε:

$$p_{\alpha\tau} + \rho g h_1' + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = p_{\alpha\tau} + \rho g(h_4 - h_2) \rightarrow$$

$$h_4 - h_2 - h_1' = \frac{\upsilon^2}{2g} \rightarrow$$

$$h_4 = h_2 + 2h_1 + \frac{\upsilon^2}{2g} = 0,05m + 2\cdot 0,15m + \frac{1}{20}m = 0,4m$$

Σωστό το α) $h_4 < 0,5m$

Σχόλια:

- Στην εξίσωση (4) θα μπορούσαμε να καταλήξουμε, αν εφαρμόζαμε ΑΔΜΕ για ένα σωματίδιο ρευστού, από την θέση Α, στη θέση Γ:

$$K_A + U_A = K_\Gamma + U_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}dm\cdot\upsilon^2 + dm\cdot g\cdot h_1 = \frac{1}{2}dm\cdot\upsilon_\Gamma^2 \rightarrow$$

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon^2 + 2gh_1}$$

- Αξίζει να προσέξουμε ότι το ύψος $h_4 = h_3 + \Delta h$, όπου $\Delta h = h_1$ η απόσταση που κατεβάσαμε το σωλήνα pitot. Αυτό σημαίνει ότι η επιφάνεια του νερού παρέμεινε σταθερή στο αριστερό σκέλος του σωλήνα.

dmargaris@gmail.com