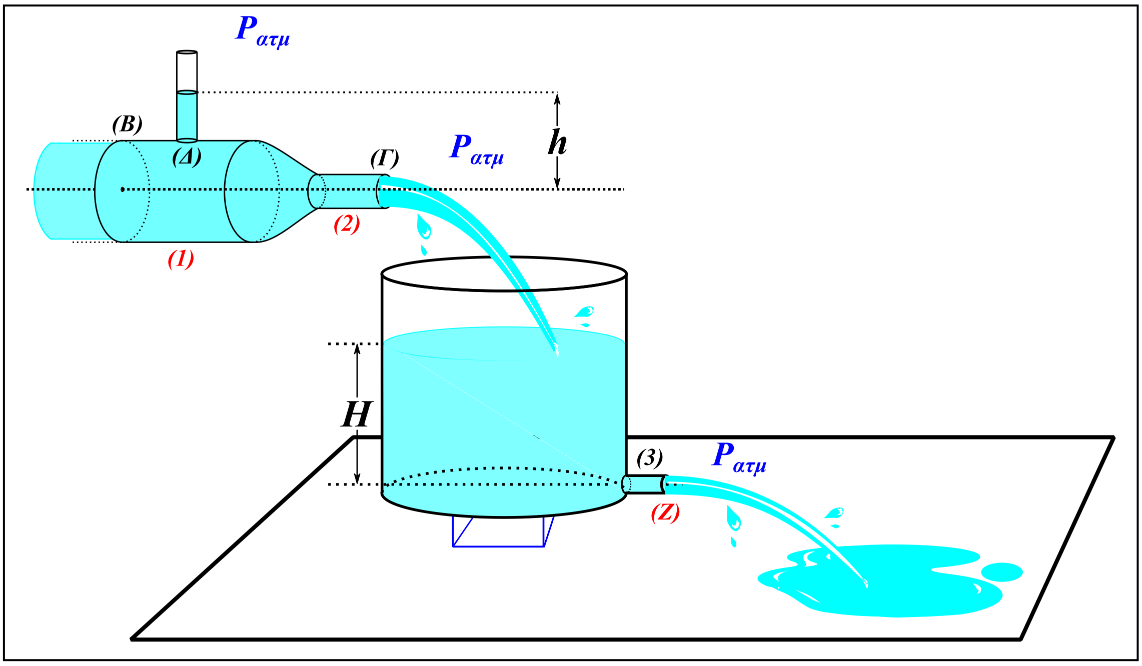
Μια άσκηση στα ρευστά, στηριγμένη σε θέμα Β του 2019

Στον οριζόντιο και ακλόνητο κυλινδρικό σωλήνα μεταβλητής διατομής ΒΓ του σχήματος, ρέει με σταθερή παροχή νερό το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό, με φορά από το Β προς το Γ. Για τα εμβαδά των εγκαρσίων περιοχών A_1 της (1) και A_2 της (2) , αντίστοιχα, ισχύει $A_1=2A_2$ με $A_1=40\ cm^2$. Σε σημείο Δ της περιοχής (1) έχουμε προσαρμόσει ένα λεπτό κατακόρυφο σωλήνα, στον οποίο η ελεύθερη επιφάνεια του νερού βρίσκεται σε ύψος h=0,6 m από την οριζόντια διεύθυνση x΄x. Το νερό που εξέρχεται από το στόμιο Γ του σωλήνα χύνεται σε δεξαμενή μεγάλου όγκου που είναι στερεωμένη σε οριζόντιο έδαφος. Στη βάση της δεξαμενής στη θέση (3), υπάρχει μικρή οπή Ζ με εμβαδό διατομής $A_3=A_2/2$. Λόγω της εξόδου του νερού από την οπή Ζ η δεξαμενή δεν μπορεί να γεμίσει και η ελεύθερη επιφάνεια του νερού σταθεροποιείται σε ύψος Η από το κέντρο της οπής αυτής.



1. *Να βρεθεί η πίεση του υγρού στην περιοχή (1) του σωλήνα.*

2. *Να υπολογιστεί η παροχή του σωλήνα ΒΓ.*

3. *Να υπολογίσετε το ύψος Η.*

Κάποια στιγμή, τροφοδοτούμε την δεξαμενή με νερό από δεύτερο σωλήνα Σ, παροχής ίσης με το μισό της παροχής του ΒΓ. Για να διατηρείται σταθερό το ύψος Η της στήλης του νερού, ανοίγουμε και δεύτερη οπή (Θ) σε περιοχή (4) της δεξαμενής , διατομής ίσης με A_3 και στην ίδια κατακόρυφη με την (Ζ).

4. *Να υπολογιστεί το βάθος της νέας οπής.*

Κάποια στιγμή, t_1 , κλείνουμε και τις δυο οπές, ενώ συνεχίζουμε να τροφοδοτούμε την δεξαμενή με τους σωλήνες ΒΓ και Σ. Το εμβαδό διατομής της βάσης της δεξαμενής είναι $A_β=1200\ cm^2$.

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΚΑΤΣΙΛΕΡΟΣ
Φυσικός

5. *Να υπολογιστεί η ταχύτητα ανόδου της ελεύθερης επιφάνειας την στιγμή t_1.*

6. *Δίνεται πως η δεξαμενή αρχίζει να ξεχειλίζει την χρονική στιγμή $t_2 = t_1 + 8\ (s)$. Να υπολογιστεί το ύψος της δεξαμενής H_1.*

Δίνονται: πυκνότητα του νερού $\rho_\nu = 10^3\ kg/m^3$, επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$. Ατμοσφαιρική πίεση $p_{\alpha\tau\mu}=10^5\ Pa$. Το νερό θεωρείται ως ιδανικό υγρό.

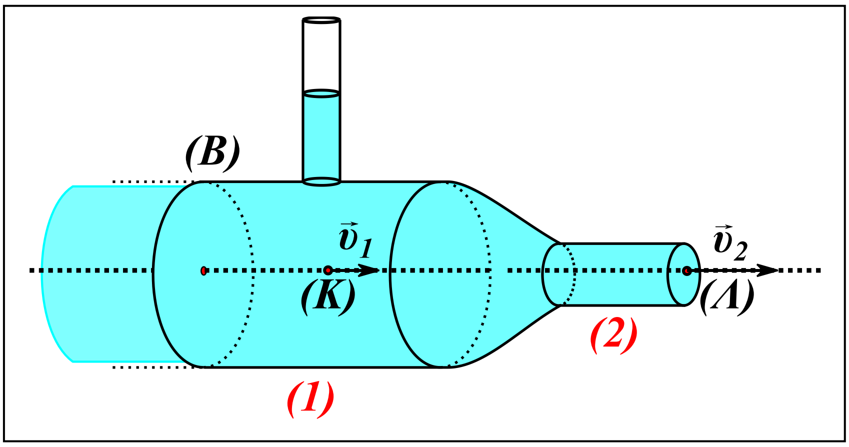
Απάντηση:

1. *Κατά μήκος του κατακόρυφου σωλήνα Δ, το υγρό είναι σε ισορροπία. Θεμελιώδης εξίσωση της υδροστατικής από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στον σωλήνα μέχρι ένα σημείο πάνω στην ρευματική γραμμή x΄x:*

$$p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h \Rightarrow p_1 = 10^5 + 10^4 \cdot 0{,}6 \Rightarrow \boldsymbol{p_1 = 1{,}06 \cdot 10^5\ Pa} \quad (1)$$

2. *Εξίσωση Bernoulli από ένα σημείο Κ της ρ.γ (=ρευματικής γραμμής) x΄x στην περιοχή 1 μέχρι ένα σημείο Λ της ρ.γ. στο στόμιο Γ , με επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας , το οριζόντιο διερχόμενο από την ρ.γ.:*

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + 0 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad (2)$$



Εξίσωση συνέχειας για την φλέβα του υγρού από την διατομή A_1 ως την διατομή A_2:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow 2A_2\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_2 = 2\upsilon_1} \quad \acute{\eta} \quad \boldsymbol{\upsilon_1 = \frac{\upsilon_2}{2}} \quad (3)$$

$$\text{Άρα, } (2) \overset{(3)}{\Rightarrow} p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + 0 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho 4\upsilon_1^2 \Rightarrow p_1 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho 3\upsilon_1^2 \Rightarrow$$

$$1{,}06 \cdot 10^5 = 10^5 + \frac{1}{2}3 \cdot 10^3\upsilon_1^2 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_1 = 2\ m/s} \text{ και από (3), } \boldsymbol{\upsilon_2 = 4\ m/s} \quad (4)$$

Οπότε , $\Pi_{B\Gamma} = \Pi_1 = \Pi_2 = A_1\upsilon_1 \Rightarrow \Pi_{B\Gamma} = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \Rightarrow \boldsymbol{\Pi_{B\Gamma} = 8 \cdot 10^{-3}\ m^3/s}$ *(5)*

3. *Η στάθμη του νερού στην δεξαμενή είναι σταθερή, άρα όσος όγκος νερού εισέρχεται από τον σωλήνα ΒΓ ισούται με τον όγκο που εξέρχεται από την οπή (Ζ) της δεξαμενής , στον ίδιο χρόνο dt:*

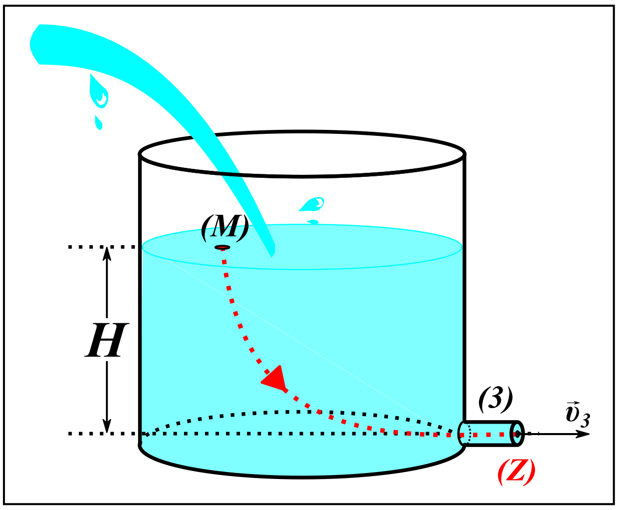
$$dV_{B\Gamma} = dV_Z \overset{:dt}{\Rightarrow} \Pi_{B\Gamma} = \Pi_Z \Rightarrow \Pi_{B\Gamma} = A_3\upsilon_3 \Rightarrow \Pi_{B\Gamma} = \frac{A_1}{4}\upsilon_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8\cdot 10^{-3} = \frac{4\cdot 10^{-3}}{4}\upsilon_3 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_3 = 8\, m/s} \qquad (6)$$

Εξίσωση Bernoulli από σημείο (Μ) της επιφάνειας του νερού στην δεξαμενή μέχρι το στόμιο (Ζ) η οποία εξελίσσεται σε ***Θεώρημα Torricelli****:*

$$\upsilon_3 = \sqrt{2gH} \Rightarrow H = \frac{\upsilon_3^2}{2g} \Rightarrow$$

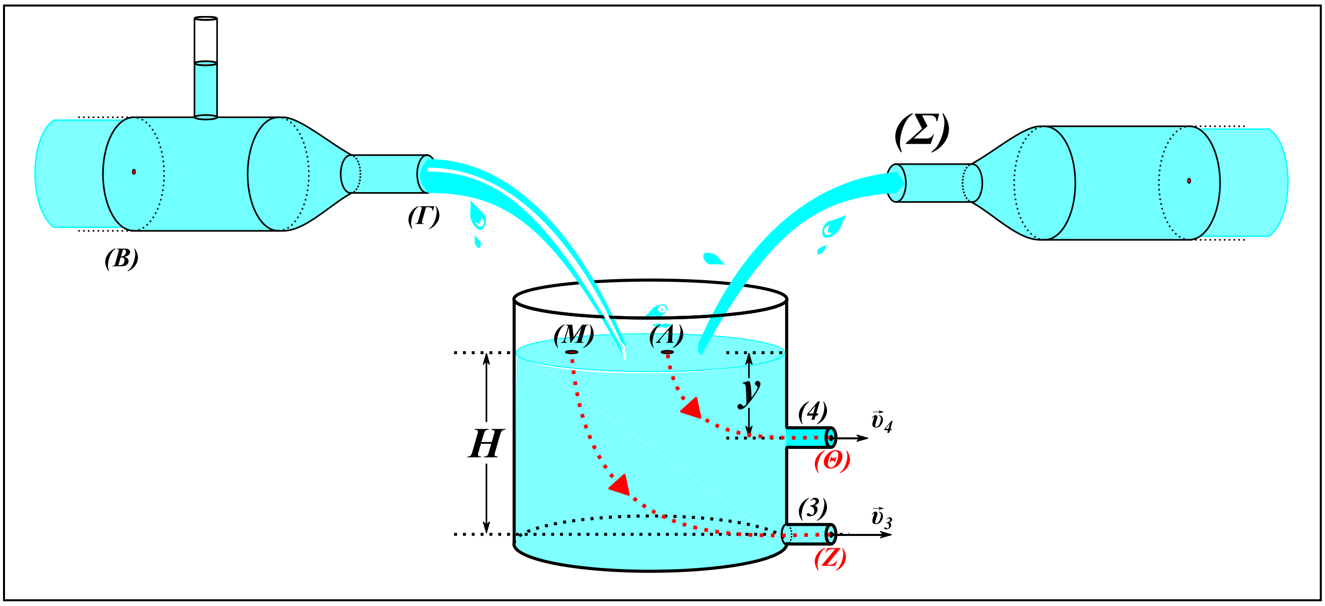
$$H = \frac{8^2}{20} \Rightarrow \boldsymbol{H = 3,2\, m} \qquad (7)$$



4. *Έστω* ***y το βάθος της νέας οπής****, (Θ). Και πάλι, για να διατηρείται το ύψος Η σταθερό:*

$$dV_{B\Gamma} + dV_{\Sigma} = dV_Z + dV_{\Theta} \overset{:dt}{\Rightarrow} \Pi_{B\Gamma} + \Pi_{\Sigma} = \Pi_Z + \Pi_{\Theta} \xRightarrow{\varepsilon\kappa\varphi\acute{\omega}\nu\eta\sigma\eta} \Pi_{B\Gamma} + \frac{\boldsymbol{\Pi_{B\Gamma}}}{\boldsymbol{2}} = A_3\upsilon_3 + \boldsymbol{A_3\upsilon_4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3\Pi_{B\Gamma}}{2} = A_3(\upsilon_3 + \upsilon_4) \xRightarrow{(5),(6)} \frac{3\cdot 8\cdot 10^{-3}}{2} = 10^{-3}(8 + \upsilon_4) \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon_4 = 4\, m/s} \qquad (8)$$

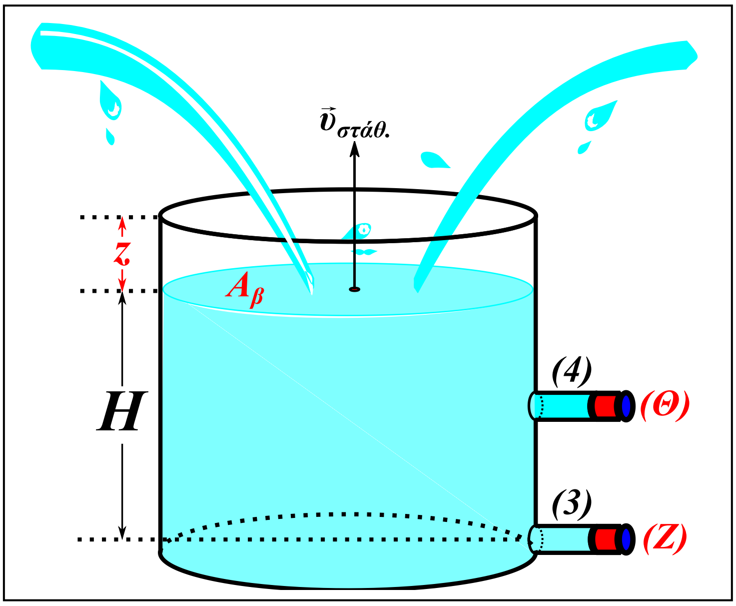


Εξίσωση Bernoulli από σημείο (Λ) της επιφάνειας του νερού στην δεξαμενή μέχρι το στόμιο (Θ) η οποία εξελίσσεται σε ***Θεώρημα Torricelli****:*

$$\upsilon_4 = \sqrt{2gy} \Rightarrow y = \frac{\upsilon_4^2}{2g} \Rightarrow y = \frac{\upsilon_4^2}{2g} \Rightarrow y = \frac{4^2}{2\cdot 10} \Rightarrow \boldsymbol{y = 0,8\, m} \qquad (9)$$

ΧΡΙΣΤΟΦΟΡΟΣ ΚΑΤΣΙΛΕΡΟΣ
Φυσικός

5. *Η στάθμη του νερού στην δεξαμενή ανέρχεται. Όσος όγκος νερού εισέρχεται από τους σωλήνες ΒΓ και Σ , θα ισούται με τον όγκο κατά τον οποίο ανέρχεται το υγρό της δεξαμενής , στον ίδιο χρόνο dt:*



$$dV_{ΒΓ} + dV_{Σ} = dV_{δεξαμενής} \overset{:dt}{\Rightarrow}$$

$$Π_{ΒΓ} + Π_{Σ} = Π_{στάθ.δεξαμενής} \Longrightarrow$$

$$\frac{3Π_{ΒΓ}}{2} = A_β \upsilon_{σταθ.} \Longrightarrow$$

$$\frac{3 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{2} = 12 \cdot 10^{-2} \cdot \upsilon_{σταθ.} \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{\upsilon_{σταθ.} = 0,1\ m/s} \qquad \textit{(10)}$$

6. *Στο χρόνο Δt = 8 (s) , στάθμη του νερού στο δοχείο θα ανεβεί κατά*

$$z = \upsilon_{σταθ.} \cdot Δt \Longrightarrow$$

$$z = 0{,}1 \cdot 8 \Longrightarrow$$

$$z = 0{,}8\ m$$

Οπότε, το ύψος της δεξαμενής είναι:

$$H + z = 3{,}2 + 0{,}8 \Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{H + z = 4\ m}$$

christoforoskatsileros@gmail.com