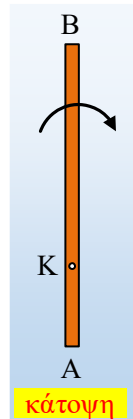


**Μια επιταχυνόμενη κίνηση ράβδου**

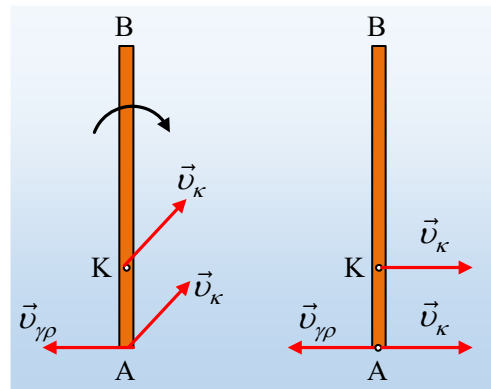
Η ράβδος AB του σχήματος, μήκους  $\ell=2m$  κινείται οριζόντια πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στρεφόμενη με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από το σημείο K, όπου  $(AK)=\frac{1}{4}\ell$ , με φορά των δεικτών του ρολογιού. Ο άξονας z κινείται ευθύγραμμα και θεωρώντας την στιγμή που η ράβδος βρίσκεται στη θέση του σχήματος, ως αρχή μέτρησης των χρόνων ( $t_0=0$ ), η ταχύτητα του άξονα μεταβάλλεται σε συνάρτηση με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση  $v_K=1+(2/\pi)t$  (S.I.). Αν τη στιγμή  $t=0$  το άκρο A της ράβδου έχει μηδενική ταχύτητα, να βρεθούν:



- i) Η κατεύθυνση της ταχύτητας του άξονα z.
- ii) Η ταχύτητα του άκρου B, τη στιγμή  $t_0=0$ .
- iii) Η ταχύτητα και η μετατόπιση του άκρου A, μόλις η ράβδος ολοκληρώσει μια περιστροφή, τη στιγμή  $t_1$ .
- iv) Η ταχύτητα του άκρου B τη χρονική στιγμή  $t_2=(5\pi/4)$  s.

**Απάντηση:**

i) Έστω ότι η ταχύτητα του άξονα z, ίση με την ταχύτητα του σημείου K, είναι αυτή του πρώτου από τα διπλανά σχήματα. Τότε το άκρο A της ράβδου, εκτελώντας μια σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική με ταχύτητα ίση με αυτή του άξονα  $\vec{v}_K$  και μια περιστροφική γύρω από τον άξονα z, με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Αλλά τότε το άκρο A θα έχει την ταχύτητα του άξονα  $\vec{v}_K$  και μια ταχύτητα  $\vec{v}_{\gamma\rho}$  κάθετη στην ράβδο με μέτρο  $v_{\gamma\rho}=\omega \cdot (AK)$ .



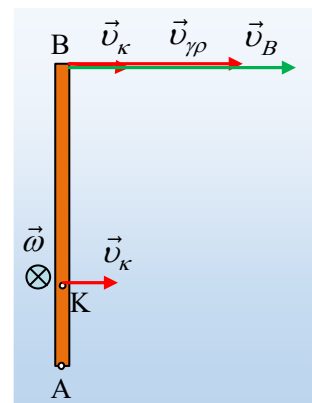
Για να έχει όμως μηδενική ταχύτητα το σημείο A, θα πρέπει οι δυο αυτές ταχύτητες να είναι αντίθετες, πράγμα που σημαίνει ότι η κατάσταση είναι αυτή που φαίνεται στο δεύτερο σχήμα, η ταχύτητα δηλαδή του άξονα, τη στιγμή  $t=0$ , είναι κάθετη στη ράβδο, με φορά προς τα δεξιά, ας το πούμε στη διεύθυνση x.

ii) Με βάση τα παραπάνω:

$$\vec{v}_A = 0 \rightarrow v_K = v_{\gamma\rho} \rightarrow \omega \frac{\ell}{4} = v_K \rightarrow \omega = \frac{4v_K}{\ell} = \frac{4 \cdot 1}{2} \text{ rad / s} = 2 \text{ rad / s}$$

Οπότε, με βάση το διπλανό σχήμα η ταχύτητα του άκρου B, είναι κάθετη στην ράβδο, με φορά προς τα δεξιά και μέτρο:

$$v_B = v_K + v_{\gamma\rho} = v_K + \omega \cdot \frac{3\ell}{4} \rightarrow v_B = 1 \text{ m / s} + 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{4} \text{ m / s} = 4 \text{ m / s}$$



iii) Η περίοδος περιστροφής της ράβδου είναι ίση:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} s = \pi \text{ s}$$

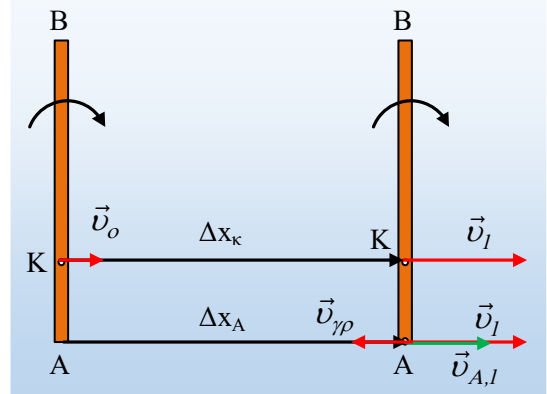
Με βάση την εξίσωση  $v_K = 1 + (2/\pi)t$  προκύπτει ότι ο άξονας κινείται ευθύγραμμα ομαλά επιταχυνόμενα με επιτάχυνση  $a = (2/\pi) \text{ m/s}^2$ , οπότε σε χρόνο μιας περιόδου ο άξονας μετατοπίζεται ευθύγραμμα στην διεύθυνση  $x$ , κατά:

$$\Delta x_K = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \left( 1 \cdot \pi + \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \pi^2 \right) m = 2\pi \text{ m} = 6,28 \text{ m}$$

Έχοντας αποκτήσει ταχύτητα  $v_1$ :

$$v_1 = 1 + \frac{2}{\pi} t_1 = \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \pi \right) m/s = 3 m/s$$

Στο σχήμα βλέπουμε τις θέσεις της ράβδου τις στιγμές  $t=0$  και  $t_1=T$ , από όπου παρατηρούμε ότι η μετατόπιση του άξονα είναι ίση και με την μετατόπιση του άκρου A της ράβδου, δηλαδή  $\Delta x_A = \Delta x_K = 6,28 \text{ m}$ .



Όσον αφορά την ταχύτητα του άκρου A, τη στιγμή  $t_1$ , θα έχουμε:

$$v_{A,1} = v_1 - v_{\gamma\rho} = v_1 - \omega \frac{\ell}{4} = 3 m/s - 2 \cdot \frac{2}{4} m/s = 2 m/s$$

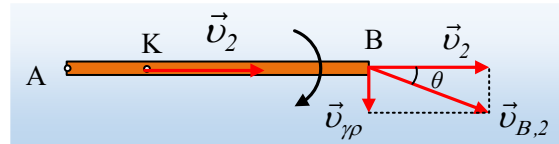
iv) Τη χρονική στιγμή  $t_2$ , η ράβδος έχει περιστραφεί κατά:

$$\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot t_2 = 2 \cdot \frac{5\pi}{4} \text{ rad} = 2,5\pi \text{ rad} = \left( 2\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ rad}$$

Δηλαδή η θέση της ράβδου είναι όπως στο σχήμα.

Τη στιγμή αυτή ο άξονας έχει ταχύτητα:

$$v_2 = 1 + \frac{2}{\pi} t_2 = \left( 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} \right) m/s = 3,5 m/s$$



Οπότε για την ταχύτητα του άκρου B, με βάση το σχήμα, θα έχουμε:

$$v_{B,2} = \sqrt{v_2^2 + \left( \omega \frac{\ell}{4} \right)^2} = \sqrt{3,5^2 + 1^2} m/s \approx 3,6 m/s \text{ και}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_{\gamma\rho}}{v_2} = \frac{1}{3,5} = \frac{2}{7}$$

[dmargaris@gmail.com](mailto:dmargaris@gmail.com)