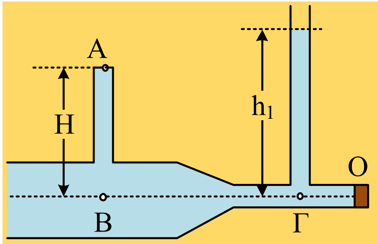
Ο κλειστός και ο ανοικτός σωλήνας σε μια ροή



Στο σχήμα βλέπουμε ένα τμήμα δικτύου, το δεξιό άκρο Ο του οποίου κλείνεται με τάπα. Στον κεντρικό σωλήνα με μεταβλητή διατομή, έχουν προσαρμοσθεί δύο κατακόρυφοι λεπτοί σωλήνες, ο πρώτος κλειστός γεμάτος νερό, με ύψος Η=0,6m (από τον άξονα του σωλήνα), ενώ ο δεύτερος ανοικτός, όπου το νερό ανεβαίνει σε ύψος h_1=0,8m (ξανά από τον άξονα του οριζόντιου σωλήνα). Η διατομή του σωλήνα στην περιοχή του σημείου Γ είναι A_1=1cm^2, ενώ στην περιοχή του σημείου Β η αντίστοιχη διατομή είναι τετραπλάσια.

i) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το νερό στην τάπα.

ii) Να βρεθεί η πίεση στο σημείο Α, στο πάνω μέρος του κλειστού σωλήνα.

iii) Ανοίγουμε την τάπα και αποκαθίσταται μια μόνιμη ροή, όπου το νερό εξέρχεται από το άκρο Ο με ταχύτητα υ=4m/s. Παρατηρούμε τώρα η στάθμη στον ανοικτό σωλήνα να έχει κατέβει κατά 20cm.

α) Υποστηρίζεται ότι η διατομή της φλέβας αμέσως μετά την έξοδο, από το σωλήνα, είναι μικρότερη από την διατομή A_1 του σωλήνα. Μπορείτε με βάση τα παραπάνω δεδομένα να ελέγξετε την ορθότητα ή όχι της παραπάνω πρότασης;

β) Σε πόσο χρόνο μπορούμε να γεμίσουμε με νερό, ένα δοχείο με όγκο V=4L, από το παραπάνω δίκτυο;

γ) Να υπολογίσετε ξανά την πίεση στο σημείο Α του κλειστού σωλήνα.

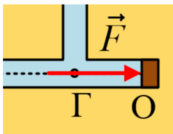
Δίνεται η πυκνότητα του νερού, το οποίο θεωρείται ιδανικό ρευστό ρ=1.000kg/m^3 και η επιτάχυνση της βαρύτητας g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Θεωρούμε ότι σε όλα τα σημεία της τάπας επικρατεί η ίδια πίεση, ίση με την πίεση στο σημείο Γ, στο κάτω μέρος του ανοικτού σωλήνα:

$$p_o = p_{ατμ} + \rho g h_1 = 10^5\,Pa + 1.000 \cdot 10 \cdot 0,8 Pa = 108.000 Pa$$

Οπότε η τάπα δέχεται οριζόντια δύναμη, κάθετη στην επιφάνεια, με μέτρο:

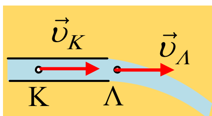


$$F = p_o A_1 = 108.000 \cdot 1 \cdot 10^{-4}\,N = 10,8N$$

ii) Η παραπάνω πίεση p_0 είναι η πίεση στον άξονα του οριζόντιου σωλήνα, άρα και στο σημείο Β, κάτω από τον κλειστό σωλήνα. Αλλά τότε:

$$p_B - p_A = \rho g H \to p_A = p_B - \rho g H = 108.000 Pa - 1.000 \cdot 10 \cdot 0,6 Pa = 102.000 Pa$$

iii) α) Αν η διατομή της φλέβας είναι ίση με την διατομή του σωλήνα, τότε:



- από την εξίσωση της συνέχειας $A_K \upsilon_K = A_Λ \upsilon_Λ$ (1) παίρνουμε $\upsilon_K = \upsilon_Λ$ (1α) .
- από την εξίσωση Bernoulli θα πάρουμε:

$$p_K + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \xrightarrow{(1\alpha)} p_K = p_\Lambda = p_{\alpha\tau\mu} \quad (2)$$

Αλλά αν η πίεση στο σημείο Κ είναι ίση με την ατμοσφαιρική, τόση θα είναι και η πίεση στο σημείο Γ και το νερό δεν θα ανέβαινε στον ανοικτό σωλήνα, πράγμα που δεν ισχύει.

Το νερό έχει ανέβει κατά $h_2=h_1-\Delta h= 60cm$. Για να συμβαίνει αυτό, η πίεση στο σημείο Γ είναι μεγαλύτερη της ατμοσφαιρικής, πράγμα που σημαίνει ότι η φλέβα στενεύει κατά την έξοδο του νερού από το σωλήνα.

β) Επιστρέφουμε στην εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των σημείων Γ και Λ, όπου έστω ότι η φλέβα στην έξοδο, σημείο Λ, έχει διατομή Α.

$$p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Gamma^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \longrightarrow p_{\alpha\tau\mu} + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \rightarrow$$

$$\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_K^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \quad (3)$$

Αλλά από την εξίσωση της συνέχειας, μεταξύ των ίδιων σημείων, θα πάρουμε:

$$A_K\upsilon_K = A_\Lambda\upsilon_\Lambda \rightarrow \upsilon_K = \frac{A}{A_1}\upsilon \quad (4)$$

Όπου υ η ταχύτητα εκροής και Α η διατομή της φλέβας στην έξοδο. Από τις (3) και (4) παίρνουμε:

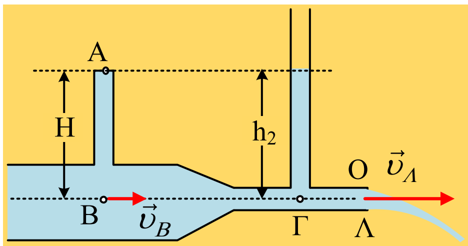
$$\rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A}{A_1}\right)^2 \upsilon^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 \rightarrow$$

$$A = \frac{A_1}{\upsilon}\sqrt{\upsilon^2 - 2gh_2} = \frac{1\cdot 10^{-4}}{4}\sqrt{4^2 - 2\cdot 10\cdot 0{,}6}\,m^2 = 0{,}5\cdot 10^{-4}\,m^2 = 0{,}5cm^2$$

Ερχόμαστε τώρα στην παροχή του δικτύου:

$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A\upsilon \rightarrow \Delta t = \frac{\Delta V}{A\upsilon} \rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{4\cdot 10^{-3}m^3}{0{,}5\cdot 10^{-4}m^2\cdot 4\,m/s} = 20s$$



γ) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ δύο διατομών της φλέβας στα σημεία Β και Λ, βρίσκουμε:

$$A_B\upsilon_B = A_\Lambda\upsilon_\Lambda \rightarrow \upsilon_B = \frac{A_\Lambda}{A_B}\upsilon = \frac{0{,}5cm^2}{4\cdot 1cm^2}4m/s = 0{,}5m/s$$

Οπότε ερχόμαστε τώρα στην εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Β και του σημείου Λ και παίρνουμε:

$$p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 = p_\Lambda + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 \rightarrow$$

$$p_B = p_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\Lambda^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_B^2 = 10^5 P\alpha + \frac{1}{2}1000(4^2 - 0,5^2)P\alpha = 107.875 P\alpha$$

Οπότε επανερχόμενοι στον θεμελιώδη νόμο της υδροστατικής:

$$p_B - p_A = \rho g H \rightarrow p_A = p_B - \rho g H \rightarrow$$
$$p_A = 107.875 Pa - 1.000 \cdot 10 \cdot 0,6 Pa = 101.875 Pa$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης