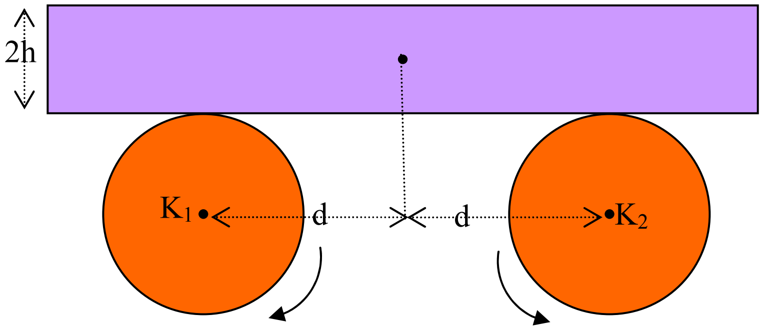
Ένας αρμονικός ταλαντωτής χωρίς ελατήριο

Οι άξονες δύο ομοίων κυλίνδρων K_1 και K_2 είναι παράλληλοι,

βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση $2d$. Αφήνουμε μία ισοπαχή ομογενή δοκό Δ μάζας m και ύψους 2h πάνω στους κυλίνδρους έτσι ώστε το μέσον της να βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφο με το μέσον της απόστασης K_1K_2. Με κατάλληλο μηχανισμό βάζουμε τους κυλίνδρους σε περιστροφή, όπως δείχνει το σχήμα. Ο συντελεστής τριβής ανάμεσα στη δοκό και στους κυλίνδρους είναι μ. Απομακρύνουμε την δοκό από την θέση ισορροπίας της και την αφήνουμε ελεύθερη να κινηθεί.



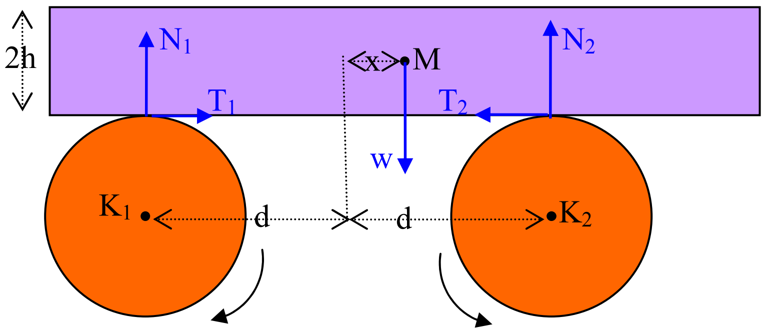
i) Να αποδείξετε ότι για μικρές τιμές του ύψους της δοκού και της αρχικής απομάκρυνσης, η δοκός εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

ii) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του ύψους της δοκού ώστε αυτή να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

iii) Να μελετήσετε την κίνηση της δοκού στην περίπτωση που το ύψος της είναι μεγαλύτερο από αυτό του ερωτήματος ii).

Απάντηση

Θεωρούμε μια τυχαία θέση της ράβδου στην οποία το μέσον της Μ απέχει απόσταση x από το μέσον της διακεντρικής απόστασης.



Στην δοκό ασκούνται το βάρος της w, οι δυνάμεις στήριξης N_1, N_2 από τους κυλίνδρους και οι τριβές ολισθήσεως T_1, T_2 από τους κυλίνδρους.

Επειδή η δοκός δεν κινείται στον κατακόρυφο άξονα, πρέπει:

$$N_1 + N_2 = w \qquad (1)$$

Επειδή η δοκός δεν στρέφεται θα πρέπει η συνισταμένη των ροπών ως προς το κέντρο μάζας της να είναι μηδέν.

$$N_2(d-x) - T_2 h - N_1(d+x) + T_1 h = 0 \Leftrightarrow$$

$$N_2(d-x-\mu h)=N_1(d+x-\mu h) \qquad (2)$$

Για να μην χάσει η δοκός επαφή με τους κυλίνδρους πρέπει N_1, $N_2 \geq 0$. Συνεπώς

$$(d-x-\mu h)(d+x-\mu h)\geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq |d-\mu h|$$

Από την (2) έχουμε:

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{d-x-\mu h}{d+x-\mu h}\Rightarrow \frac{N_1}{N_1+N_2}=\frac{d-x-\mu h}{2d-2\mu h}\Rightarrow N_1=w\frac{d-x-\mu h}{2(d-\mu h)} \qquad (3)$$

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{d-x-\mu h}{d+x-\mu h}\Rightarrow \frac{N_1+N_2}{N_2}=\frac{2(d-\mu h)}{d+x-\mu h}\Rightarrow N_2=w\frac{d+x-\mu h}{2(d-\mu h)} \qquad (4)$$

Για την συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στην δοκό στην διεύθυνση κίνησης του κέντρου μάζας της ισχύει ότι:

$$\Sigma F_x=T_1-T_2=\mu(N_1-N_2)=-\mu mg\frac{x}{d-\mu h} \qquad (5)$$

Διακρίνουμε τις επόμενες περιπτώσεις

Περίπτωση 1: d>μh (μικρό ύψος)

Από την σχέση (5) προκύπτει ότι το σώμα εκτελεί α.α.τ με σταθερά επαναφοράς

$D=\dfrac{\mu mg}{d-\mu h}$ και περίοδο $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\dfrac{d-\mu h}{\mu g}}$

Για να είναι N_1, $N_2 \geq 0$ πρέπει $|x|\leq d-\mu h \Leftrightarrow A\leq d-\mu h$

Περίπτωση 2: d<μh (μεγάλο ύψος)

Από την σχέση (5) παρατηρούμε ότι με $x>0 \Rightarrow \Sigma F_x>0$ και με $x<0 \Rightarrow \Sigma F_x<0$.

Επομένως η ράβδος δεν εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Αν απομακρύνουμε την ράβδο από την θέση ισορροπίας και την αφήσουμε ελεύθερη, τότε απομακρύνεται από την θέση ισορροπίας διαρκώς επιταχυνόμενη.

Για να είναι $N_1 \geq 0$ θα πρέπει $d-x-\mu h \leq 0 \Rightarrow x \geq -(\mu h-d)$

Για να είναι $N_2 \geq 0$ θα πρέπει $d+x-\mu h \leq 0 \Rightarrow x \leq (\mu h-d)$

Συνεπώς αν απομακρύνουμε την ράβδο προς τα δεξιά σε απόσταση μικρότερη από μh-d και την αφήσουμε ελεύθερη, τότε θα αρχίσει να κινείται προς τα δεξιά επιταχυνόμενη συνεχώς και στην θέση x=μh-d θα χάσει επαφή με τον δεξιό κύλινδρο!!

Περίπτωση 3: d=μh

Η σχέση (2) γίνεται: $-N_2x=N_1x$

Για να είναι N_1, $N_2 \geq 0$ πρέπει x=0.

Παρατηρήσεις

1) Η εφαρμογή της συνθήκης $\Sigma\tau=0$ ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της δοκού είναι σχεδόν υποχρεωτική. Επειδή η ράβδος εκτελεί επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση, η συνθήκη $\Sigma\tau=0$ ως προς ένα σημείο δεν εξασφαλίζει την ισχύ της ως προς ένα άλλο.

Για να προκύψει η σωστή συνθήκη ισορροπίας των ροπών θα πρέπει το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζονται οι ροπές να βρίσκεται σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι παράλληλη στην διεύθυνση της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας.

2) Το αποτέλεσμα της περίπτωσης 2 είναι διαισθητικά μη αναμενόμενο

Όταν $d<\mu h$ τότε από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε ότι

$$N_1 = w\frac{\mu h - d + x}{2(\mu h - d)} \text{ και } N_2 = w\frac{\mu h - d - x}{2(\mu h - d)}$$

Συνεπώς, καθώς η δοκός κινείται προς τα δεξιά, η N_1 αυξάνεται και η N_2 μειώνεται.

Στην θέση $x=\mu h-d$ η N_2 μηδενίζεται και η δοκός ανατρέπεται.

3) Έστω ότι αντιστρέφουμε την φορά περιστροφής και στους δύο κυλίνδρους.

Οι αντίστοιχες σχέσεις των (3), (4), (5) μπορούν να προκύψουν αντικαθιστώντας $\mu \to -\mu$.

$$N_1 = w\frac{d - x + \mu h}{2(d + \mu h)},\ N_2 = w\frac{d + x + \mu h}{2(d + \mu h)},\ \Sigma F_x = \mu mg\frac{x}{d + \mu h}$$

Επομένως αν η δοκός απομακρυνθεί προς τα δεξιά λίγο από την θέση ισορροπίας και αφεθεί ελεύθερη, τότε αρχίζει να επιταχύνεται απομακρυνόμενη και σε απόσταση $d+\mu h$ από την θέση ισορροπίας χάνει την επαφή με τον αριστερό κύλινδρο.

Αν θέσουμε $D = \frac{\mu mg}{d + \mu h}$ και $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{\mu g}{d + \mu h}}$ τότε η απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την σχέση

$x(t) = A\frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$, όπου A η αρχική απομάκρυνση.

korfiatis@sch.gr