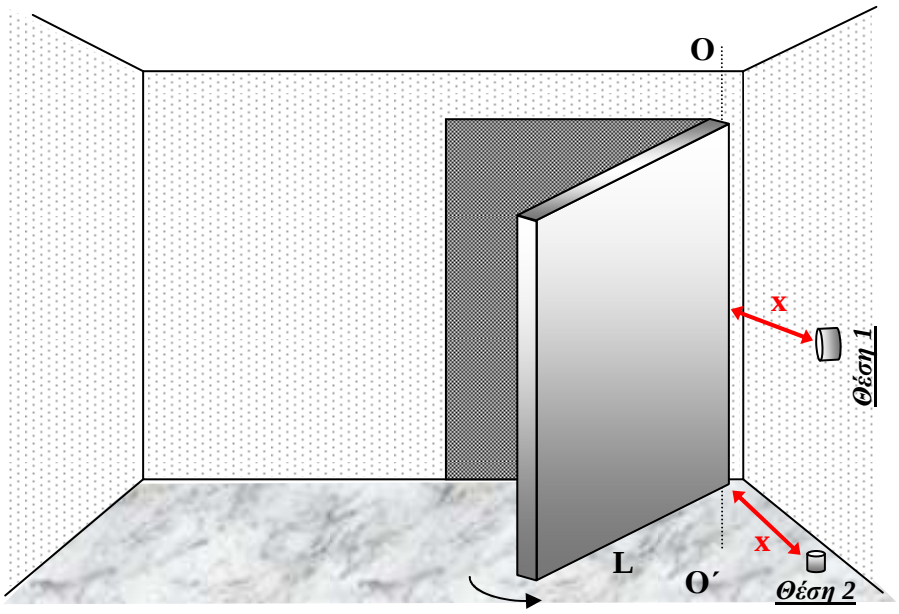
# *Τι κοινό έχει μια πόρτα, ένα … ρόπαλο του baseball και ένα φυσικό εκκρεμές; Κέντρο κρούσης, κέντρο αιώρησης*

Σε πόση απόσταση από τον άξονα περιστροφής μιας πόρτας πρέπει να στερεώσουμε ένα εμπόδιο (κόντρα ή … ελληνιστί stopper), ώστε να τερματίζεται η διαδρομή της; Πιο κατάλληλη θέση είναι βέβαια να μπαίνει το εμπόδιο στα μισά του ύψους της πόρτας (Θέση 1) για να αποφεύγεται η «συστροφή» όταν χτυπάει πάνω του απότομα, αλλά αν ο τοίχος δεν είναι διαθέσιμος, τότε αναγκαστικά στερεώνουμε το εμπόδιο στο πάτωμα (Θέση 2).

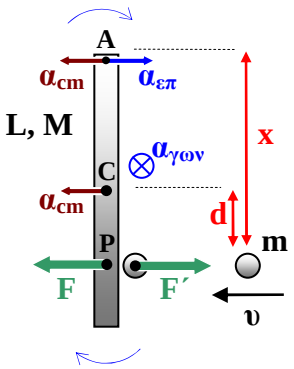
Σε πόση απόσταση **x** όμως; Μήπως ίση με L, κοντά δηλαδή στο άκρο της πόρτας;

Σε πρώτη σκέψη φαίνεται λογικό αυτό, διότι όσο πιο κοντά στο άκρο πιάνουμε την πόρτα, τόσο πιο εύκολα τη σταματάμε.

Ποιο είναι όμως το κριτήριο; Να μην καταπονείται το εμπόδιο όταν χτυπάει η πόρτα πάνω του, ή ***να μην καταπονούνται οι μεντεσέδες της πόρτας***;




## *Το κέντρο κρούσης*




Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη … ράβδο του Διονύση :-) μάζας **M** και μήκους **L**, ακίνητη πάνω στην παγωμένη επιφάνεια της λίμνης. Ένα σώμα μάζας **m** κινείται με ταχύτητα **υ** κάθετα προς το μήκος της και πέφτει επάνω της σε απόσταση **x** από το ένα της άκρο A ή **d** από το κέντρο μάζας C (διπλανό σχήμα, κάτοψη).

Η δύναμη **F** που ασκείται στη ράβδο της προσδίδει για μικρό χρόνο μεταφορική και γωνιακή επιτάχυνση $\alpha_{cm}$ και $\alpha_{\gamma\omega\nu}$ αντίστοιχα, με μέτρα:

$F = M \cdot \alpha_{cm} \rightarrow \alpha_{cm} = F/M$ και

$F \cdot d = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = F \cdot d/I$

Έτσι, κάθε σημείο Α της ράβδου, ανάλογα με τη θέση του, αποκτά ***κάθετα προς τη ράβδο*** επιτάχυνση $\boldsymbol{\alpha = \alpha_{cm} \pm \alpha_{\varepsilon\pi}}$ η αλλιώς $\boldsymbol{\alpha = \alpha_{cm} \pm \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot r}$, όπου **r** η απόστασή του από το C. Με αντικατάσταση ($\boldsymbol{I = {}^{1}/_{12} \cdot M \cdot L^2}$):

$$\boldsymbol{\alpha = F/M \pm F \cdot d \cdot r/I \;\rightarrow\; \alpha = \frac{F}{M}\left(\frac{L^2 \pm 12 \cdot d \cdot r}{L^2}\right)}$$

Είναι φανερό ότι σε κάθε σημείο πρόσκρουσης P και άσκησης κάθετης δύναμης **F** αντιστοιχεί κάποιο σημείο Α της ράβδου που θα έχει μηδενική επιτάχυνση:

$$\boldsymbol{\alpha = 0 \;\rightarrow\; 12 \cdot d \cdot r = L^2 \;\rightarrow\; \boxed{r = \frac{L^2}{12 \cdot d}}}$$

Το σημείο Α ***θα παραμείνει δηλαδή στιγμιαία ακίνητο και θα ορίσει στιγμιαίο άξονα περιστροφής*** για την κίνηση της ράβδου αμέσως μετά την κρούση (πάνω σ' αυτήν, ή πάνω στη «στερεή» και άϋλη προέκτασή της όπως λέει κι ο Νίκος :-)).

Ή ***αν διέρχεται σταθερός άξονας*** από το Α ***δεν θα δεχτεί από τη ράβδο κάθετη δύναμη εξαιτίας της κρούσης***.

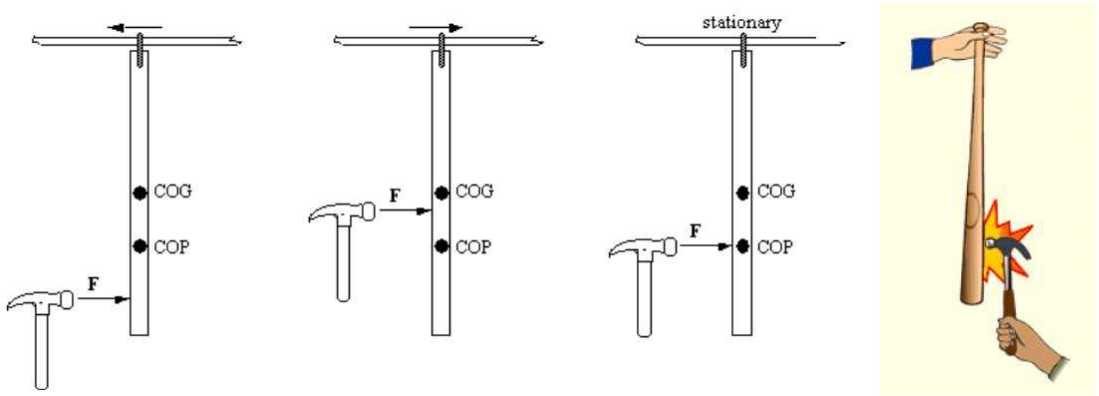
Ή τέλος, αν κρατάμε στο σημείο Α τη ράβδο δεν θα νοιώσουμε το «τράνταγμα» της κρούσης!

Λέμε ότι τα σημεία Α και P αποτελούν ζευγάρι ***κέντρου περιστροφής*** (center of rotation, c.o.r.) και ***κέντρου κρούσης*** (center of percussion, c.o.p.). Η απόστασή τους είναι βέβαια **r+d** αφού βρίσκονται εκατέρωθεν του κέντρου μάζας C.

<u>Αν το σημείο Α βρίσκεται στο πάνω άκρο της ράβδου</u>, όπως στο σχήμα, τότε **r = L/2** και **d = L/6**. Η περίπτωση αυτή αποτελεί και την απάντηση στο ερώτημα με την πόρτα, αφού <u>το σχήμα με τη ράβδο μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ότι είναι μια κάτοψη της πόρτας</u>. Έτσι η ζητούμενη απόσταση **x** είναι:

$$\boldsymbol{x = L/2 + L/6 \;\rightarrow\; \boxed{x = {}^{2}/_{3}L}}$$

Φυσικά, μπορούμε να βρούμε το κέντρο κρούσης και πειραματικά, με ένα … σφυράκι! Τα πιο κάτω σχήματα μιλάνε από μόνα τους (COG εννοεί το κέντρο βάρους):

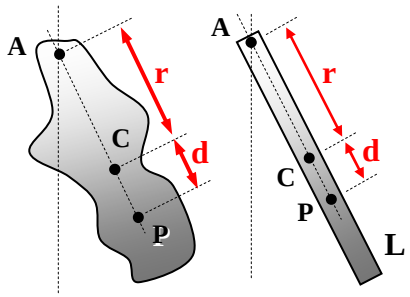



Την ίδια «μέθοδο» χρησιμοποιούν και στο ρόπαλο του baseball που λόγω του σχήματός του, οι θεωρητικοί υπολογισμοί είναι δύσκολοι! Η γνώση της θέσης του κέντρου κρούσης εδώ χρειάζεται αν θέλει ο παίκτης να κτυπήσει δυνατά τη μπάλα χωρίς να πονέσει το χέρι του από το τράνταγμα. Παρόμοια εφαρμογή έχουμε και στις ρακέτες του τένις, στα ξίφη, κλπ.

Αν έχετε σκάψει ποτέ με κασμά (αξίνα) θα θυμάστε πως πονούν τα χέρια όταν πέσετε κατά λάθος σε βράχο. Με τη βαριοπούλα όμως

μπορούμε να σπάμε μεγάλες πέτρες χωρίς «αντίκτυπο» στους καρπούς μας. Δεδομένου ότι η μάζα της κεφαλής της βαριοπούλας είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή της αξίνας, σκεφτείτε που βρίσκεται το κέντρο κρούσης σε κάθε περίπτωση.

## ***Το κέντρο αιώρησης ή κέντρο ταλάντωσης***




Από την ανάλυση της ταλάντωσης ενός φυσικού εκκρεμούς, προκύπτει η περίοδός του, που είναι:

$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}}}$, όπου **I** η ροπή αδράνειάς του ως προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο στήριξης A και **r** η απόσταση του σημείου A από το κέντρο μάζας C.

Αν συγκρίνουμε τη σχέση αυτή με τη γνωστή περίοδο του μαθηματικού εκκρεμούς

$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$, μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος $\boldsymbol{\ell}$ ενός μαθηματικού εκκρεμούς ισόχρονου με το φυσικό. Η σύγκριση δίνει: $\boxed{\ell = \mathbf{\frac{I}{Mr}}}$. Το μήκος αυτό ονομάζεται ***ενεργό μήκος*** (effective length) του φυσικού εκκρεμούς. Το σημείο του φυσικού εκκρεμούς (πάνω στην ευθεία AC) που απέχει απόσταση $\boldsymbol{\ell}$ από το A ονομάζεται ***κέντρο αιώρησης*** ή ***κέντρο ταλάντωσης*** (center of oscillation, c.o.o.) του φυσικού εκκρεμούς (αφού μπορούμε θεωρήσουμε συγκεντρωμένη εκεί όλη τη μάζα του, ώστε να προκύπτει ισόχρονο μαθηματικό εκκρεμές).

Το ενδιαφέρον τώρα είναι το εξής:

Το εν λόγω κέντρο ταλάντωσης ***συμπίπτει*** με το κέντρο κρούσης του ίδιου σώματος (ως προς τον ίδιο άξονα A) που περιγράψαμε πιο πάνω.

Αν βρούμε δηλαδή πειραματικά με το σφυράκι και σημειώσουμε το κέντρο κρούσης P πάνω στο φυσικό μας εκκρεμές, τότε η απόσταση (AP) θα είναι ίση με το ενεργό μήκος του $\boldsymbol{\ell}$.

Ή ανάποδα, αν π.χ. κρεμάσουμε το ρόπαλο του baseball και χρονομετρήσουμε την περίοδο αιώρησής του, τότε μπορούμε από τη σχέση $\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$ να βρούμε το ενεργό μήκος του $\boldsymbol{\ell}$ και στη συνέχεια από την ισότητα (AP) = $\boldsymbol{\ell}$ να προσδιορίσουμε τη θέση του κέντρου κρούσης P.

Μπορούμε να κάνουμε μια ενδεικτική επαλήθευση των ανωτέρω χρησιμοποιώντας τη ράβδο του προηγούμενου παραδείγματος σαν φυσικό εκκρεμές. Θέτουμε **I=⅓ML²**, **r=L/2** και έχουμε:

$$\mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgr}}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{T = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$

Από εδώ προκύπτει ότι το ενεργό μήκος της ράβδου είναι $\boxed{\boldsymbol{\ell} = \mathbf{⅔L}}$

Η τιμή αυτή είναι βέβαια ίδια με την απόσταση $\boxed{\mathbf{(AP) = x = ⅔L}}$ που βρήκαμε πριν.