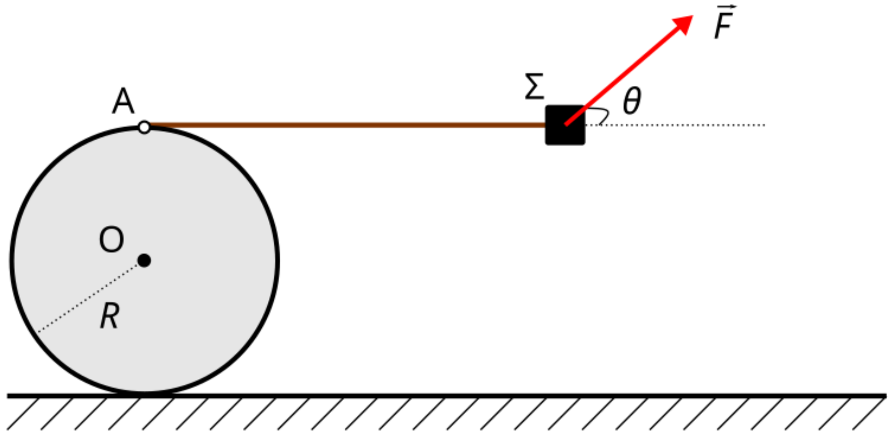
Ένα σώμα σε οριζόντιο νήμα και ο δίσκος

Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής δίσκος μάζας $M = 4kg$ και ακτίνας R. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του Ο και είναι κάθετος στο επίπεδό του είναι ίση με $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2$. Στην περιφέρεια του δίσκου έχουμε τυλίξει πολλές φορές ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα στην άκρη του οποίου έχουμε προσδέσει ένα σώμα Σ μάζας $m = 1{,}2kg$.



Ασκούμε στο σώμα Σ μία σταθερού μέτρου δύναμη F, η οποία σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση σταθερή γωνία θ, με αποτέλεσμα το νήμα να παραμένει διαρκώς οριζόντιο και ο δίσκος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ και πως $\eta\mu\theta = 0{,}6$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 0{,}8$. Να θεωρήσετε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου.

Να υπολογίσετε:

Α. το μέτρο της δύναμης F που ασκείται στο σώμα Σ.

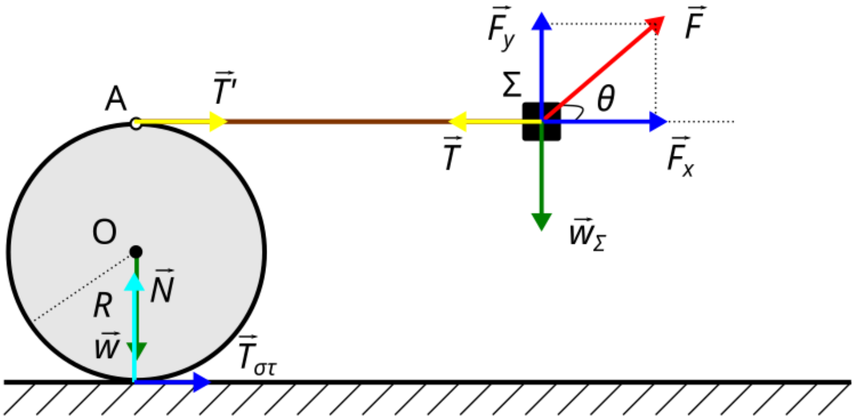
Β. την τάση του νήματος.

Γ. το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη $\vec{F}$ προσφέρει ενέργεια στο σώμα Σ τη στιγμή που το κέντρο Ο του δίσκου έχει ταχύτητα μέτρου $\upsilon_O = 4m/s$.

Δ. το λόγο της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ προς την κινητική ενέργεια του δίσκου.

Λύση

Α. Επειδή το νήμα παραμένει διαρκώς οριζόντιο, συμπεραίνουμε ότι το σώμα Σ ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση.



Δηλαδή

$$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow F_y = w_\Sigma \Longrightarrow F \cdot \eta\mu\theta = mg \Longrightarrow F = \frac{mg}{\eta\mu\theta} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow F = \frac{1{,}2 \cdot 10}{0{,}6} N \Longrightarrow \boxed{F = 20N}$$

Β. Θα εφαρμόσουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για την κίνηση του κάθε σώματος του συστήματος ξεχωριστά.

<u>Σώμα Σ</u>

$$\Sigma F = ma \Longrightarrow F_x - T = ma \Longrightarrow F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T = ma \quad (1)$$

<u>Δίσκος</u>

$$\Sigma F = Ma_{cm} \Longrightarrow T + T_{\sigma\tau} = Ma_{cm} \quad (2)$$

$$\Sigma\tau_O = I_{cm}a_{\gamma\omega\nu} \Longrightarrow TR - T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow T - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}MRa_{\gamma\omega\nu} \quad (3)$$

Όπου υποθέσαμε ότι στο δίσκο ασκείται δύναμη τριβής (στατική, καθώς δεν ολισθαίνει) με φορά προς τα δεξιά και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $T' = T$ επειδή το νήμα είναι αβαρές.

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο, συμπεραίνουμε ότι το κατώτερο σημείο του θα έχει διαρκώς μηδενική ταχύτητα. Έτσι, θα ισχύει ότι

$$a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu}R \quad (4)$$

Τέλος, καθώς το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου, συμπεραίνουμε ότι το σώμα Σ θα έχει τα ίδια στοιχεία κίνησης στην οριζόντια (εφαπτομενική) διεύθυνση με του ανώτερου σημείου Α του δίσκου. Επομένως,

$$a = 2a_{cm} \quad (5)$$

Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, θα προσδιορίσουμε την τάση του νήματος. Έτσι, η σχέση (3) λόγω της (4) γίνεται

$$T - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}Ma_{cm} \quad (6)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2) και (6), προκύπτει ότι:

$$2T = \frac{3}{2}Ma_{cm} \quad (7)$$

Επίσης, η σχέση (1) λόγω της (5) γίνεται:

$$F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T = 2ma_{cm} \Longrightarrow a_{cm} = \frac{F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T}{2m} \quad (8)$$

Επομένως

$$(7) \overset{(8)}{\Longrightarrow} 2T = \frac{3}{4}\frac{M}{m}(F \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - T) \Longrightarrow 2T = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1{,}2}(20 \cdot 0{,}8 - T) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2T = \frac{1}{0{,}4}(16 - T) \Longrightarrow 2T = \frac{5}{2}(16 - T) \Longrightarrow 4T = 80 - 5T \Longrightarrow$$

$$9T = 80 \Longrightarrow \boxed{T = \frac{80}{9}N}$$

Γ. Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του δίσκου, κάθε χρονική στιγμή το σώμα Σ έχει ίδια ταχύτητα με την ταχύτητα του ανώτερου σημείου Α του δίσκου. Άρα, ισχύει κάθε χρονική στιγμή ότι

$$\upsilon_\Sigma = \upsilon_A = \upsilon_O + \upsilon_{\gamma\rho,A} = \upsilon_O + \omega R$$

Καθώς ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, το κατώτερο σημείο του έχει διαρκώς μηδενική ταχύτητα, με αποτέλεσμα να ισχύει ότι $\upsilon_O = \omega R$. Επομένως

$$\upsilon_\Sigma = 2\upsilon_O$$

Έτσι, η ζητούμενη ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ (ρυθμός προσφοράς ενέργειας από τη δύναμη) προκύπτει ίση με:

$$P_F = \frac{dW_F}{dt} = F\frac{dx_\Sigma}{dt}\sigma\upsilon\nu\theta = F \cdot \upsilon_\Sigma \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = F \cdot 2\upsilon_O \cdot \sigma\upsilon\nu\theta \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_F = 20 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 0{,}8W \Longrightarrow \boxed{P_F = 128W}$$

Δ. Για το ζητούμενο λόγο, κάθε χρονική στιγμή, έχουμε:

$$\frac{K_\Sigma}{K_\delta}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_O^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_O^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\omega^2}\xRightarrow{\upsilon_O=\omega R}\frac{K_\Sigma}{K_\delta}=\frac{\frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2}{\frac{1}{2}M\upsilon_O^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}M\upsilon_O^2}\Longrightarrow$$

$$\xRightarrow{\upsilon_\Sigma=2\upsilon_O}\frac{K_\Sigma}{K_\delta}=\frac{\frac{1}{2}m(2\upsilon_O)^2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}M\upsilon_O^2}=\frac{4m}{\frac{3}{2}M}=\frac{8}{3}\cdot\frac{m}{M}\Longrightarrow\frac{K_\Sigma}{K_\delta}=\frac{8}{3}\cdot\frac{1{,}2}{4}\Longrightarrow\boxed{\frac{K_\Sigma}{K_\delta}=0{,}8}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com