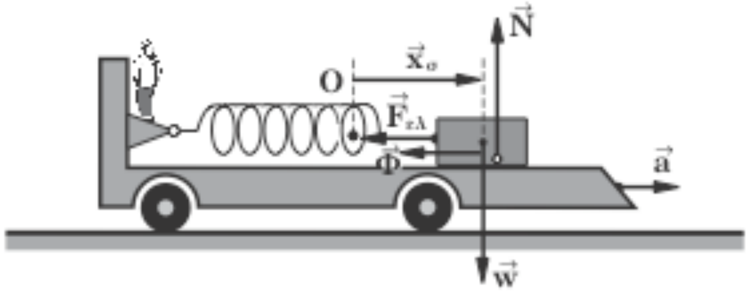
Επιβεβαίωση, με άλλο τρόπο, μιας εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Ας εξετάσουμε αρχικά την κίνηση του σώματος στο σύστημα αναφοράς της βάσεως, της οποίας το δάπεδο θεωρείται λείο. Στο σύστημα αυτό το σώμα δέχεται το βάρος του $\vec{\mathbf{w}}$ που εξουδετερώνεται από την κατακόρυφη αντίδραση $\vec{\mathbf{N}}$ του δαπέδου, την δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_{\varepsilon\lambda}$ από το ελατήριο και την αδρανειακή ψευδοδύναμη d' Alempert $\vec{\mathbf{\Phi}} = -\mathbf{m}\vec{\mathbf{a}}$, όπου $\vec{\mathbf{a}}$ η επιτάχυνση της βάσεως στο σύστημα αναφοράς του εδάφους. Εφαρμόζοντας για το σώμα τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα παίρνουμε τη σχέση:

$$\mathbf{ma_\sigma = -kx_\sigma - ma} \qquad (1)$$

όπου $\vec{\mathbf{a}}_\sigma$ η επιτάχυνση του σώματος στο σύστημα αναφοράς της βάσεως και $\vec{\mathbf{x}}_\sigma$ η αντίστοιχη μετατόπισή του, μετρούμενη αυθαίρετα με αρχή την θέση O του σώματος, όταν το ελατήριο βρίσκεται στην φυσική του κατάσταση. Ας



δεχθούμε ακόμη ότι η εξίσωση κίνησης της βάσεως στο σύστημα αναφοράς του εδάφους έχει την μορφή x_2=Αημωt, όπου x_2 η αντίστοιχη μετατόπιση της βάσεως (αλγεβρική τιμή), οπότε η έξίσωση της επιτάχυνσής της θα έχει στο σύστημα αυτό την μορφή:

$$\mathbf{a = -A\omega^2\eta\mu\omega t = -\omega^2 x_2} \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε:

$$\mathbf{ma_\sigma + kx_\sigma = m\omega^2 x_2} \qquad (3)$$

Όμως, αν $\vec{\mathbf{a}}_1$ είναι η επιτάχυνση του σώματος στο σύστημα αναφοράς του εδάφους και $\vec{\mathbf{x}}_1$ η αντίστοιχη μετατόπισή του, θα έχουμε, σύμφωνα με τα γνωστά των σχετικών κινήσεων, τις σχέσεις:

$$\mathbf{a_\sigma = a_1 - a} \ \ \textbf{και} \ \ \mathbf{x_\sigma = x_1 - x_2}$$

οπότε η σχέση (3) παίρνει την μορφή:

$$\mathbf{m(a_1 - a) + k(x_1 - x_2) = m\omega^2 x_2} \ \Rightarrow$$

$$\mathbf{ma_1 - ma + kx_1 = kx_2 + m\omega^2 x_2 \overset{(2)}{\Rightarrow}}$$

$$\mathbf{ma_1 + m\omega^2 x_2 + kx_1 = kx_2 + m\omega^2 x_2 \Rightarrow}$$

$$\mathbf{ma_1 + kx_1 = kx_2 \Rightarrow m\frac{dx_1^2}{dt^2} + kx_1 = kx_2}$$

δηλαδή προκύπτει η ίδια σχέση με εκείνη του συναδέλφου μου, χωρίς όμως να χρησιμοποιηθεί η έννοια της Lagragian του συστήματος.