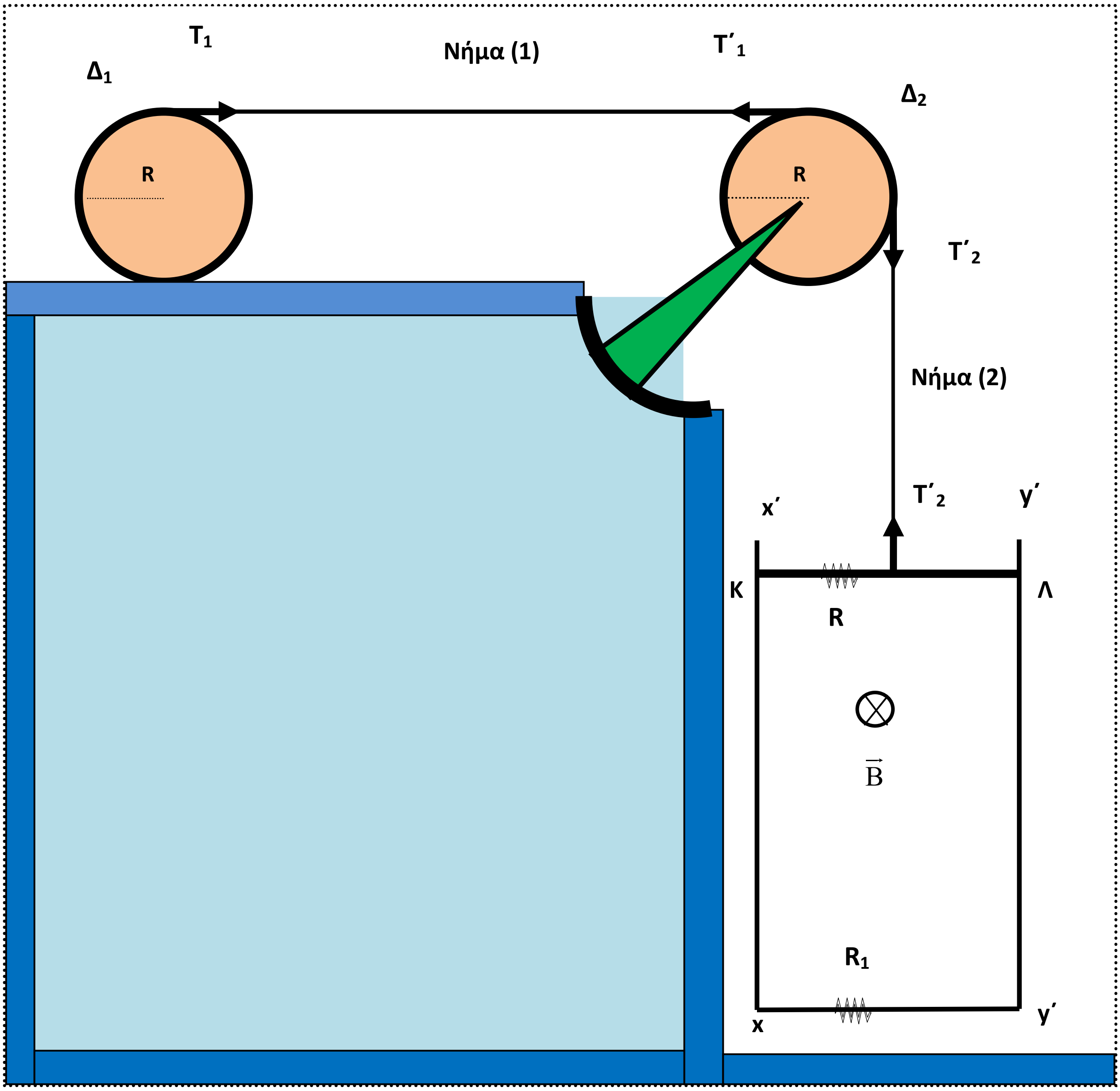
ΘΕΜΑ Δ

Ο τροχός Δ_1 του σχήματος έχει μάζα **M =4Kg**, ακτίνα **R=0,1m** και μπορεί να κυλίεται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο χωρίς να ολισθαίνει..Ο τροχαλία Δ_2 έχει επίσης μάζα **M** ,ακτίνα **R**και μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. **Η** ράβδος **ΚΛ** ,έχει μήκος **L =1m** μάζα **m =1Kg** ωμική αντίσταση **R=1Ω** και μπορεί να κινείται κατακόρυφα παραμένοντας διαρκώς οριζόντια και σε αγώγιμη επαφή με τους κατακόρυφους μεταλλικούς οδηγούς **x′x** και **y′y** .Στο χώρο υπάρχει οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο ένταση $\vec{B}$.Αρχικά η ράβδος **ΚΛ** κρατείται ακίνητη και στην συνέχεια ασκώντας σ′ αυτήν κατάλληλη κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ εξασφαλίζουμε να κινηθεί με σταθερή επιτάχυνση μέτρου **α′.** Διαπιστώνουμε ο τροχός Δ_1 κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η τροχαλία στρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου α'_γ ,χωρίς το νήμα να ολισθαίνει κατά μήκος της περιφέρειάς της .Οι δύο κατακόρυφοι οδηγοί συνδέονται αγώγιμα μέσω αντιστάτη αντίστασης R_1**=1Ω.**Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της



βαρύτηΤας **g=10m/s²**.Η ροπή αδράνειας του τροχού και της τροχαλίας ως προς άξονα ο οποίος διέρχεται από το κέντρο μάζας τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους , δίνεται από την σχέση **$I=\frac{1}{2}MR^2$.**

Δ1.Να δείξετε ότι ο λόγος των μέτρων $\frac{T_1}{T_{\sigma\tau}}$ της τάσης του νήματος **(1)** προ το μέτρο της στατικής τριβής έχει τιμή **3**

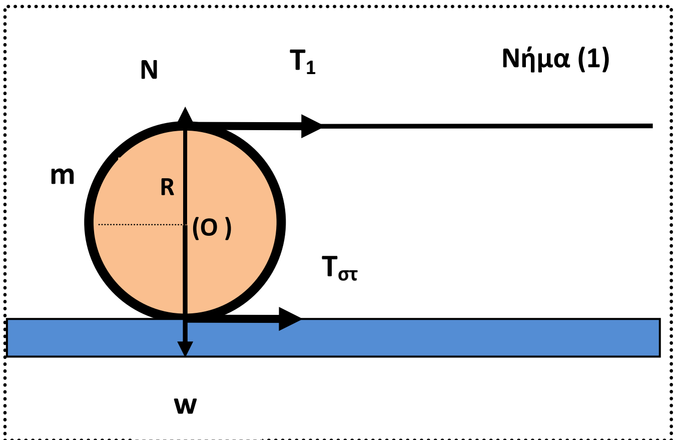
Δ2.Αν η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας έχει μέτρο **α'_γ=20rad/s²** να υπολογίσετε το παραγόμενο έργο από την ροπή της τάσης T_1, στη διάρκεια μιας πλήρους περιστροφής της τροχαλίας.

Δ3.Να εκφράσετε την αλγεβρική τιμή τη δύναμης $\vec{F}$ η οποία ασκείται στη ράβδο **ΚΛ** , σε συνάρτηση με τον χρόνο και να την παραστήσετε γραφικά, από την χρονική στιγμή **t_0=0** ,μέχρι τον μηδενισμό της, τη χρονική στιγμή **t_1**.

Δ4. Αν τη στιγμή **t_1**, στην οποία μηδενίζεται το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$, κοπούν ταυτοχρόνως τα δύο νήματα ,διαπιστώνουμε ότι στη συνέχεια ο τροχός **Δ1** κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει να βρεθούν οι τελικές ταχύτητες του δίσκου ,του τροχού και της ράβδου **ΚΛ**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:

Δ1.



<u>Μεταφορική κίνηση</u>

$\Sigma F_x = m\alpha_{\tau\rho} \rightarrow T_1 + T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm}$ (1)

<u>Στροφική κίνηση</u>

$\Sigma\tau_{(0)} = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1 R - T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma\omega\nu}$

$T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (2)

<u>Κύλιση χωρίς ολίσθηση:</u> $\alpha_{cm} = R\alpha_{\gamma\omega\nu}$ (3)

(2), (3) $T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\alpha_{cm}$ (4)

(1), (4) πρόσθεση κατά μέλη $2T_1 = \frac{3}{2}m\alpha_{cm} \rightarrow \boxed{T_1 = \frac{3}{4}m\alpha_{cm}}$ (5)

(4), $T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} \rightarrow \frac{3}{4}m\alpha_{cm} - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}m\,\alpha_{cm} \rightarrow \boxed{T_{\sigma\tau} = \frac{1}{4}m\alpha_{cm}}$ (6)

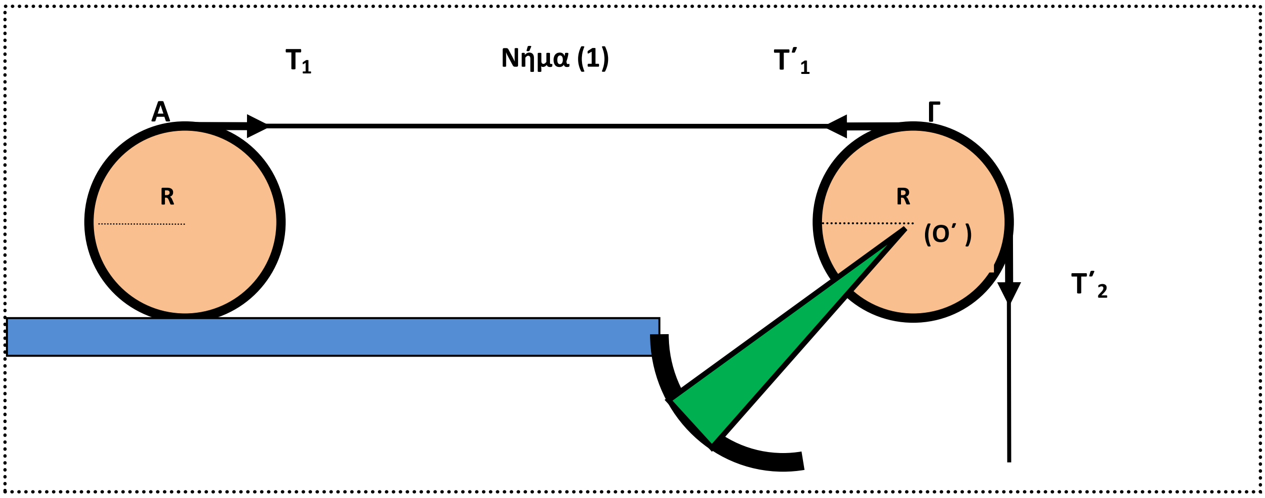
(5), (6) $\boxed{\dfrac{T_1}{T_{\sigma\tau}}=3}$ (6)

Παρατήρηση: Αν η φορά της $T_{\sigma\tau}$ ληφθεί προς τ΄αριστερά τότε γράφοντας τις σχέσεις (1), (4) θα προκύψει ότι η διαφορά των μέτρων των T και $T_{\sigma\tau}$ είναι μεγαλύτερη από το άθροισμά τους!!

Δ2. Το νήμα είναι τεντωμένο άρα οι ταχύτητες των σημείων Α και Γ είναι ίσες :

$$\boldsymbol{\upsilon_\Gamma = \upsilon_A} \rightarrow \omega R=2\upsilon_{cm} \quad (7)$$

όπου ω το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των περιφερειακών σημείων της τροχαλίας και υ_{cm} η ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού



$$(7) \quad \omega R=2\upsilon_{cm} \rightarrow R\alpha'_{\gamma\omega\nu}=2\,\alpha_{cm} \quad (8)$$

όπου α_{cm} ή επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού και $\alpha'_{\gamma\omega\nu}$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας.

Μια περιστροφή της τροχαλίας αντιστοιχεί σε γωνιακή μετατόπιση Δθ=2π της τροχαλίας

$$\frac{1}{2}\alpha'_{\gamma\omega\nu}\Delta t^2=2\pi \rightarrow \frac{1}{2}\alpha'_{\gamma\omega\nu}R\Delta t^2=2\pi R \rightarrow \frac{1}{2}2\,\alpha_{cm}\Delta t^2=2\pi R \rightarrow 2(\frac{1}{2}\alpha_{cm}\Delta t^2)=2\pi R$$

$$2S_{cm}=2\pi R \rightarrow \boxed{S_{cm}=\pi R} \quad (9)$$

Ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει άρα κάθε περιφερειακό σημείο του τροχού έχει σταφεί κατά τόξο ίσο με τη μετατόπιση του κέντρου μάζας του τροχού.Δηλαδή

$$\mathbf{S_{\tau\acute{o}\xi o}=\pi R} \quad (10)$$

Το έργο της ροπής (ψευδοέργο κατά A.Arons) της τάσης είναι ίσο με :

$$W_{\tau T}=T_1R\Delta\theta \quad \text{με} \quad \Delta\theta=\pi\ (rad)$$

$$W_{\tau_T}=T_1R\pi \rightarrow W_{\tau_T}=T_1 0{,}1\pi \quad (11)$$

Υπολογισμός του μέτρου της T_1:

$$\alpha_{cm}= R\alpha_{\gamma\omega\nu} \ (3) \qquad R\alpha'_{\gamma\omega\nu}=2\ \alpha_{cm} \ (8)$$

$$R\alpha'_{\gamma\omega\nu}=2\ R\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \alpha'_{\gamma\omega\nu}=2\ \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 20=2\ \alpha_{\gamma\omega\nu}, \rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu}=10rad/s^2 \qquad (12)$$

$$(2) \quad T_1 - T_{\sigma\tau}= \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{T_1}{T_{\sigma\tau}}=3 \quad (6)$$

$$T_1 - \frac{T_1}{3}= \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \frac{2T_1}{3}= \frac{1}{2}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1= \frac{3}{4}MR\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T_1= \frac{3}{4}4.\ 0{,}1\ .10 \rightarrow T_1=3N\ (13)$$

$$(11), (13) \quad W_{\tau_T}=3.0{,}1\pi \rightarrow W_{\tau_T}=0{,}3\pi \rightarrow \boxed{W_{\tau_T}=0{,}3\pi\ j}$$

Δ3.Αρχικά υπολογίζουμε το μέτρο της T_2:

Στροφική κίνηση της τροχαλίας: $\Sigma\tau_{(0')}= \frac{1}{2}MR^2\alpha'_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T'_2\,R - T'_1\,R = \frac{1}{2}MR^2\alpha'_{\gamma\omega\nu}$

$$T'_2 - T'_1= \frac{1}{2}MR\alpha'_{\gamma\omega\nu} \qquad T_1=T'_1 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad T_2=T'_2$$

$$T_2-3= \frac{1}{2}4\ .0{,}1.20 \rightarrow T_2-3= 4 \rightarrow T_2= 4+ 3 \rightarrow T_2= 7\,N \ (14)$$

<u>Κίνηση της ράβδου ΚΛ:</u>

Έστω ότι η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα κάτω

Εξαιτίας της κίνησης της ράβδου μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από το κλειστό κύκλωμα ΚΛxy με συνέπεια να αναπτύσσεται σε αυτό επαγω γική Η.Ε.Δ.

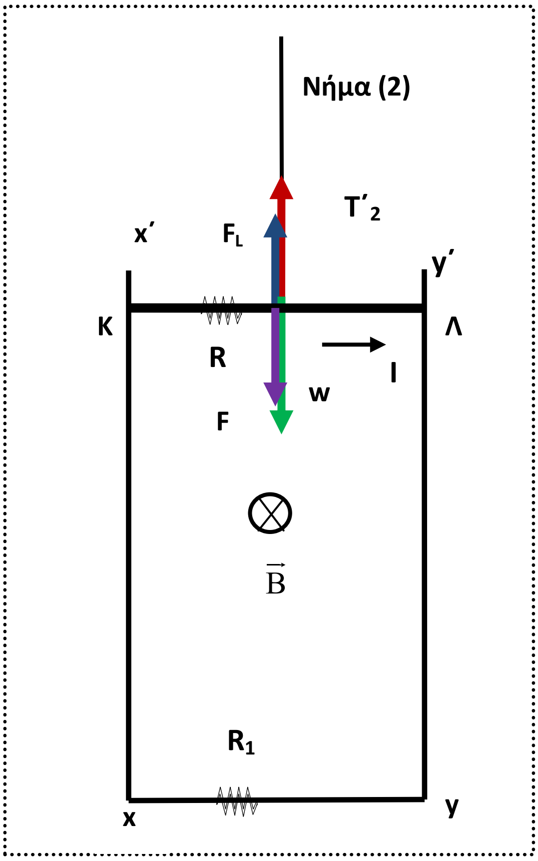
$E_{\varepsilon\pi}=B\upsilon L \quad (15)$ όπου L το μήκος της ράβδου ΚΛ

Το κύκλωμα διαρρέεται από επαγωγικό ρεύμα έντασης

$$I_{\varepsilon\pi}= \frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}=\frac{B\upsilon L}{R+R_1}=\frac{1(a_1t)1}{1+1}=\frac{a_1t}{2}=t(S.I.) \quad (16)$$

Η ΚΛ διαρρέεται από το επαγωγικό ρεύμα και επομένως δέχεται την δύναμη Laplace της οποία το μέτρο δίνεται από τη σχέση

$$F_L=BIL=1.\alpha_1 t.1=\alpha_1 t \ (S.I.) \ (17)$$



Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την ράβδο γράφεται:

$\Sigma F=m_1\alpha \rightarrow F+w-F_L-T'_2= m\alpha_1$

$F+10-F_L-7 = 1\ \alpha_1 \rightarrow F-\frac{a_1}{2}t=-3-1\ \alpha_1$ (18)

Τα σημεία του νήματος (2) έχουν ταχύτητα ίδιου μέτρου .

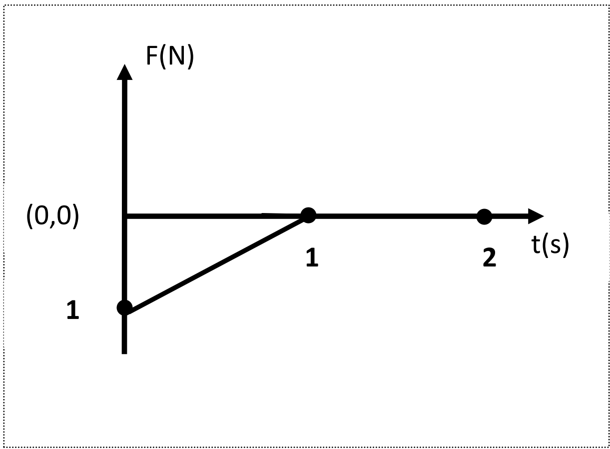
Άρα το μέτρο της ταχύτητας της ράβδου είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των περιφερεια-κών σημείων της τροχαλίας.

$\boldsymbol{\upsilon'=\upsilon_{K\Lambda}} \rightarrow \omega'R=\upsilon_{K\Lambda} \rightarrow \alpha'_\gamma R=\alpha_1 \rightarrow 20.0{,}1=\alpha_1 \rightarrow \alpha_1=2m/s$ (19)

(18) , (19) $F-F_L=-3-1.2 \rightarrow$ $\boxed{F=-1+t}$ (S.I.) (20)

Η δύναμη $\vec{F}$ έχει φορά προς τα πάνω μέχρι την χρονική στιγμή t=1s όπου μηδενίζεται και στην συνέχεια αλλάζει φορά .

Η γραφική παράσταση της αλγεβρικής τιμής της $\vec{F}$



Δ4.Την στιγμή t_1=1s καταργείται η $\vec{F}$**.Τη στιγμή αυτή :**

<u>Ράβδος ΚΛ</u>

υ_1=2m/s $T'_2=0$ και στην ράβδο ΚΛ ασκούνται πλέον μόνο το βάρος της και η δύναμη Laplace της οποίας το μέτρο δίνεται από τη σχέση:

$F_L=BIL$ με $I=\frac{E_{\varepsilon\pi}}{R_{o\lambda}}=\frac{B\upsilon L}{R+R_1}=\frac{\upsilon}{2}$ **οπότε** $F_L=\frac{\upsilon}{2}$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την ράβδο γράφεται: $\Sigma F=m_1\alpha \rightarrow w-F_L= m_1\alpha'$

$1.10-\frac{\upsilon}{2}=1.\alpha' \rightarrow \alpha'=10-\frac{\upsilon}{2}$ από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι καθώς η ταχύτητα αυξάνεται το μέτρο της επιτάχυνσης μειώνεται.Η κίνηση της ΚΛ είναι ευθύγραμμη επιταχυνόμενη με επιτάχυνση μειούμενου μέτρου.Όταν η επιτάχυνση αυτή μηδενιστεί η ράβδος θα αποκτήσει σταθερή ταχύτητα ίση με 20 m/s και θα κινείται στο εξής **ευθύγραμμα και ομαλά.**

$$\boxed{υ_{ΚΛ,τελ} = 20\ m/s} \quad (21)$$

<u>Τροχαλία</u>

t=1s $\quad ω' = α'_{γων}\,t = 20.1 = 20 rad/s$

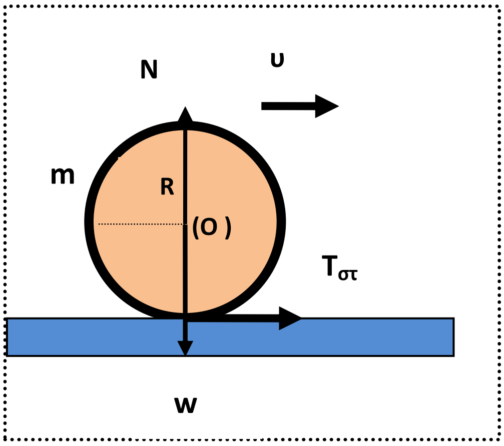
και καθώς η τροχαλία δέχεται μηδενική συνισταμένη δύναμη και μηδενική συνισταμένη ροπή θα διατηρήσει την κινητική της κατάσταση **στρεφόμενη ομαλά κυκλικά** με σταθερή γωνιακή ταχύτητα

$$\boxed{ω_{τροχ} = 20\ rad/s} \quad (22)$$

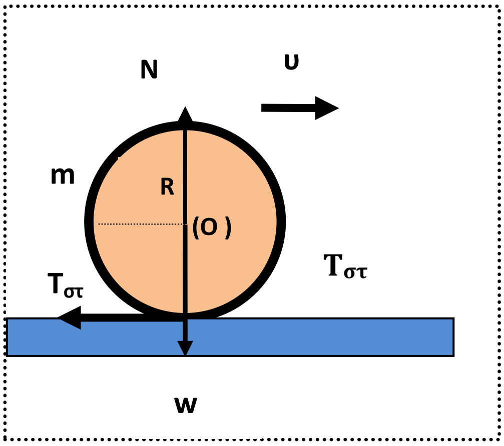
<u>Τροχός</u>

t=1s $\quad ω = α_{γων}\,t = 10.1 = 10 rad/s$, $\quad υ_{,cm} = ωR = 10\ .0,1 = 1m/s$

Εφόσον δίνεται η πληροφορία ότι ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει καταλαβαίνουμε ότι κάθε στιγμή ισχύει η σχέση $υ_{,cm} = ωR$.'Ετσι θα πρέπει η οι $υ_{,cm}$,ω να μειώνονται συγχρόνως είτε να αυξάνονται συγχρό-νως είτε τέλος να διατηρούν σταθερές τις τιμές τους.



(σχήμα α)



(σχήμα β)

Όπως όμως φαίνεται στα παραπάνω σχήματα είναι αδύνατον να αυξάνονται ή να μειώνονται συγχρόνως $υ_{cm}$ και ω ,καθώς η στατική τριβή και η ροπή της, ως προς το κέντρο μάζας του τροχού , δεν μπορούν να παίξουν συγχρόνως τους ρόλους της επιταχύνουσας δύναμης και της επιταχύνουσας ροπής αντίστοιχα ,ούτε συγχρόνως τους ρόλους της επιβραδύνουσας δύναμης και της επιβραδύνουσας ροπής αντίστοιχα

Επομένως ο τροχός δεν μπορεί να δέχεται δύναμη τριβής ,και ελλείψει συνισταμένης μη μηδενικής δύναμης και συνισταμένης μη μηδενικής ροπής θα πραγματοποιεί στο σύνθετη κίνηση, μεταφορική ευθύγραμμη ομαλή με ταχύτητα $υ_{,cm}$=1m/s και ομαλή στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας του και κάθετο στο επίπεδό του , με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $ω = α_{γων}\,t = 10.1 = 10 rad/s$.