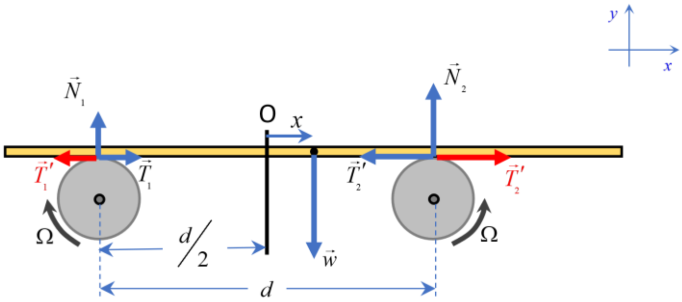
Μια συνοπτική περιγραφή από ενεργειακή άποψη του γνωστού προβλήματος 4.70 του σχολικού βιβλίου.

Η ανάλυση του προβλήματος οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κίνηση της σανίδας είναι αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα,

$$\omega = \sqrt{\frac{2\mu g}{d}}$$



Σε τυχαία απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας τα μέτρα των τριβών της σανίδας με τους κυλίνδρους δίνονται από τις σχέσεις,

$$T_1 = \frac{\mu mg}{2}\left(1 - \frac{2x}{d}\right),\ T_2 = \frac{\mu mg}{2}\left(1 + \frac{2x}{d}\right)$$

Και η συνισταμένη δύναμη

$$\sum F_x = -\frac{2\mu mg}{d}x$$

Η οριζόντια κίνηση της ράβδου είναι αρμονική ταλάντωση **με την προϋπόθεση ότι συνεχώς ολισθαίνει πάνω στους κυλίνδρους** ώστε τα μέτρα των τριβών να δίνονται από τις παραπάνω εκφράσεις. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει καθ’ όλη τη διάρκεια της κίνησης ο περιορισμός,

$$\Omega R > |\upsilon| \text{ ή } \Omega R > \omega A$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης.

Έστω ότι αφήνουμε τη σανίδα πάνω στους κυλίνδρους με το κέντρο μάζας της σε απόσταση, $A_0 > \frac{\Omega R}{\omega} = \Omega R\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$, από το σημείο ισορροπίας της. Η σανίδα θα δεχθεί τις δυνάμεις τριβής ολίσθησης από τους κυλίνδρους και θα αρχίσει την ταλάντωσή που περιγράψαμε προηγουμένως. Όταν όμως το κ.μ. της σανίδας φτάσει σε απόσταση ίση με $\Omega R\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$, κινούμενο προς το σημείο ισορροπίας το μέτρο της ταχύτητας της σανίδας θα γίνει ίσο με το μέτρο της ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του πιο κοντινού κυλίνδρου, και επομένως θα σταματήσει η ολίσθηση με αυτόν τον κύλινδρο και η τριβή θα είναι στατική και ίση κάθε στιγμή με την τριβή ολίσθησης με τον άλλο κύλινδρο. Η ταχύτητα της σανίδας θα παραμείνει σταθερή και ίση με ΩR, μέχρι την θέση ισορροπίας (θεωρώντας ότι ο συντελεστής οριακής τριβής και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης ταυτίζονται) όπου η στατική τριβή θα γίνει ίση με την οριακή και θα ξεκινήσει ξανά η ολίσθηση. Στη συνέχεια θα ακολουθήσει αρμονική ταλάντωση με $\upsilon_{max} = \Omega R$ και πλάτος $A_{max} = \Omega R\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}$

Συνοψίζοντας, αν αφήσουμε το κέντρο μάζας της σανίδας σε απόσταση A_0 από το σημείο ισορροπίας το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι,

$$A = \begin{cases} A_0 & \gamma\iota\alpha\ A_0 \le A_{max} \\ A_{max} & \gamma\iota\alpha\ A_0 > A_{max} \end{cases}$$

Η ενέργεια

Οι κύλινδροι περιστρέφονται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα οπότε η ροπή του εξωτερικού μηχανισμού σε κάθε κύλινδρο θα είναι κάθε στιγμή ομόρροπη της αντίστοιχης γωνιακής ταχύτητας και μέτρου,

$$\tau_1 = T_1 R = \frac{\mu m g R}{2}\left(1 - \frac{2x}{d}\right) \text{ και } \tau_2 = T_2 R = \frac{\mu m g R}{2}\left(1 + \frac{2x}{d}\right)$$

Άρα η παρεχόμενη ισχύς σε κάθε κύλινδρο θα είναι αντίστοιχα,

$$p_1 = \frac{\mu m g R\Omega}{2}\left(1 - \frac{2x}{d}\right) \text{ και } p_2 = \frac{\mu m g R\Omega}{2}\left(1 + \frac{2x}{d}\right)$$

και η συνολική παρεχόμενη ισχύς,

$$\boxed{p = \mu m g R\Omega = \sigma\tau\alpha\theta.}$$

Λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας θα ισχύει κάθε χρονική στιγμή,

$$p = \frac{dK}{dt} + \frac{dQ}{dt}$$

όπου $\frac{dQ}{dt}$ ρυθμός έκλυσης θερμότητας λόγω τριβής και $\frac{dK}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου. Από την τελευταία βρίσκουμε,

$$\frac{dQ}{dt} = p - \frac{dK}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \mu m g R\Omega - \sum F \cdot \upsilon \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = \mu m g R\Omega + \frac{2\mu m g}{d} x \cdot \upsilon}$$

Αν για $t = 0$, $x = A$, $\upsilon = 0$, η τελευταία σχέση γράφεται σαν συνάρτηση του χρόνου,

$$\frac{dQ}{dt} = \mu m g R\Omega - \frac{\mu m g A^2 \omega}{d} \eta\mu(2\omega t)$$

Παρατήρηση:

Στο τελικό αποτέλεσμα για την θερμική ισχύ λόγω των τριβών μπορούμε να φτάσουμε και με απευθείας υπολογισμό ως εξής (όπου υ η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της σανίδας):

$$\frac{dQ_1}{dt} = T_1(\Omega R - \upsilon) = \frac{\mu m g}{2}\left(1 - \frac{2x}{d}\right)(\Omega R - \upsilon) \text{ και } \frac{dQ_2}{dt} = T_2(\Omega R + \upsilon) = \frac{\mu m g}{2}\left(1 + \frac{2x}{d}\right)(\Omega R + \upsilon)$$

Το άθροισμα των παραπάνω μας δίνει την ολική θερμική ισχύ που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Σπύρος Χόρτης