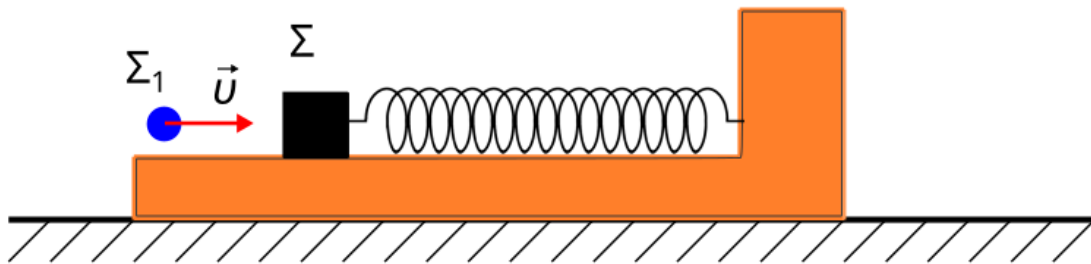


## Η πλατφόρμα παραμένει ακίνητη μετά την κρούση

Στο σχήμα φαίνεται μία πλατφόρμα μάζας  $M$  την οποία έχουμε τοποθετήσει πάνω σε ένα οριζόντιο επίπεδο. Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ της πλατφόρμας και του επιπέδου είναι  $\mu$ . Πάνω στην πλατφόρμα, βρίσκεται ένα οριζόντιο ιδανικό ελατήριο σταθεράς  $k$  το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Το ένα άκρο του ελατηρίου το έχουμε συνδέσει με την πλατφόρμα, ενώ στο άλλο του άκρο έχουμε στερεώσει ένα σώμα  $\Sigma$  αμελητέων διαστάσεων μάζας  $m$ . Μεταξύ του σώματος  $\Sigma$  και της πλατφόρμας δεν αναπτύσσεται δύναμη τριβής.



Ένα βλήμα  $\Sigma_1$  αμελητέων διαστάσεων και μάζας  $m_1 = m$  κινείται οριζόντια, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και σφηνώνεται ακαριαία στο σώμα  $\Sigma$  έχοντας ακριβώς πριν από την κρούση τους οριζόντια ταχύτητα μέτρου  $v$ .

- Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του μέτρου  $v$  της ταχύτητας του βλήματος ώστε το συσσωμάτωμα να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση και η πλατφόρμα να παραμένει ακίνητη σε όλη τη διάρκεια κίνησης του συσσωματώματος.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g$ . Να θεωρήσετε αμελητέα την αντίσταση του αέρα και πως το συσσωμάτωμα παραμένει διαρκώς πάνω στην πλατφόρμα, χωρίς να τίθεται θέμα ανατροπής αυτής.

### Λύση

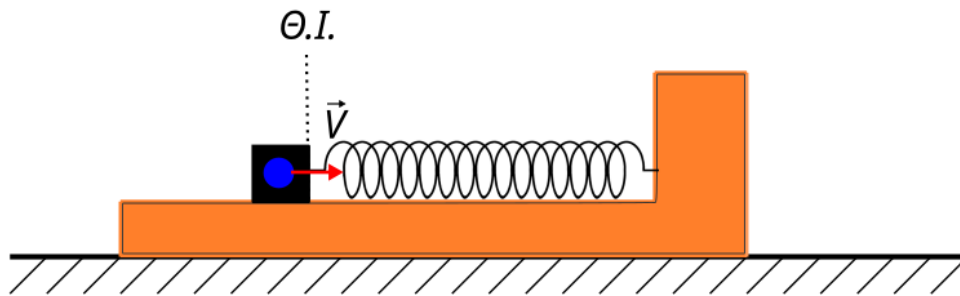
Με εφαρμογή της Αρχής Διατήρησης της Ορμής κατά την κρούση για το σύστημα των σωμάτων  $\Sigma_1 - \Sigma$  έχουμε ότι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση, ικανοποιεί τη σχέση:

$$\vec{p}_{\text{αρχ}} = \vec{p}_{\text{τελ}} \Rightarrow m_1 v = (m_1 + m) V \xrightarrow{m_1=m} V = \frac{v}{2}$$

Καθώς θέλουμε η πλατφόρμα να παραμένει διαρκώς ακίνητη, συμπεραίνουμε ότι το συσσωμάτωμα εκτελεί Α.Α.Τ. με Θ.Ι. τη θέση της κρούσης, η οποία είναι και η θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Επομένως, η παραπάνω ταχύτητα ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα.

# Υλικό Φυσικής – Χημείας

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...



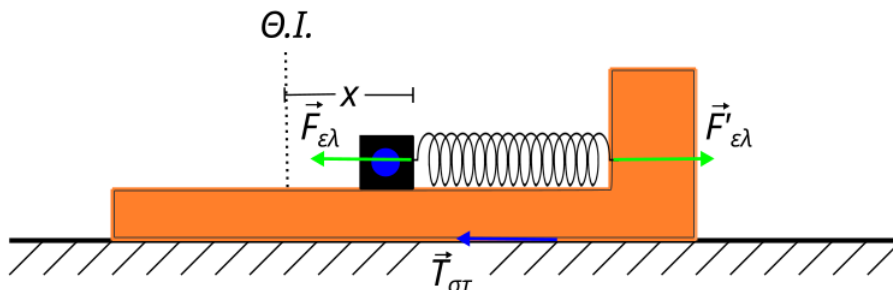
Δηλαδή,

$$V = V_{max} \Rightarrow \frac{v}{2} = \omega A$$

όπου  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m}} = \sqrt{\frac{k}{2m}}$  η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης του συσσωματώματος και  $A$  το πλάτος αυτής. Επομένως,

$$A = \frac{v}{2\omega} \Rightarrow A = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \quad (1)$$

Η πλατφόρμα, κατά την κίνηση του συσσωματώματος, στην οριζόντια διεύθυνση δέχεται τη δύναμη του ελατηρίου και τη δύναμη τριβής από το έδαφος.



Για να μην ολισθήσει η πλατφόρμα, θα πρέπει το μέτρο της δύναμης που το ελατήριο της ασκεί να μην υπερβεί την οριακή τριβή μεταξύ πλατφόρμας και εδάφους, ώστε η ασκούμενη τριβή από το έδαφος να είναι διαρκώς στατική.

Έτσι, θέλουμε να ισχύει για την πλατφόρμα διαρκώς ότι (για τυχαία απομάκρυνση  $x$ ):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 &\Rightarrow |\vec{F}'_{ελ}| = T_{στ} \leq T_{ορ} = \mu N \Rightarrow \\ &\Rightarrow k|x| \leq \mu N \end{aligned}$$

Επειδή  $0 \leq |x| \leq A$ , για να ικανοποιούνται τα παραπάνω αρκεί η μέγιστη τιμή της δύναμης του ελατηρίου να μην υπερβαίνει την οριακή τριβή. Άρα, αρκεί

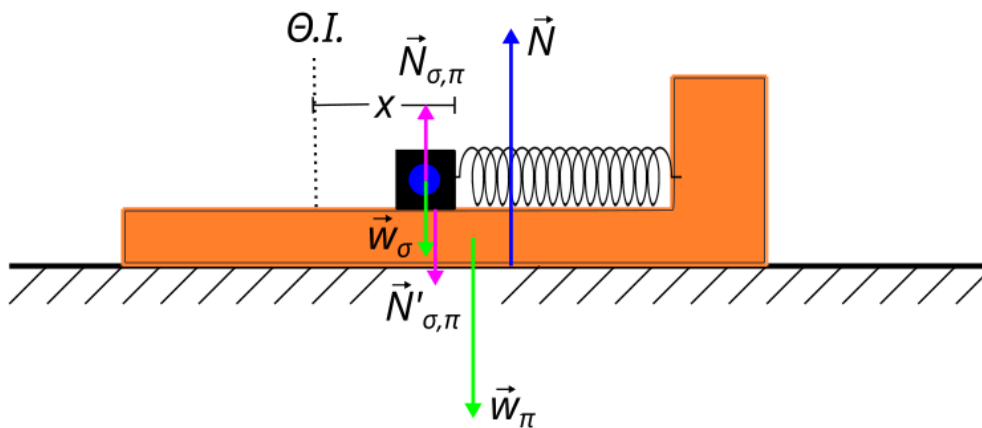
$$kA \leq \mu N$$

# Υλικό Φυσικής - Χημείας

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Λόγω της σχέσης (1) προκύπτει ότι

$$\frac{vk}{2} \sqrt{\frac{2m}{k}} \leq \mu N \Rightarrow v \sqrt{\frac{mk}{2}} \leq \mu N \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v \leq \mu N \sqrt{\frac{2}{mk}} \quad (2)$$



Από την ισορροπία της πλατφόρμας στην κατακόρυφη διεύθυνση, προκύπτει ότι

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = w_{\pi} + N'_{\sigma,\pi} \Rightarrow N = Mg + (m_1 + m)g \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N = (2m + M)g \quad (3)$$

Όπου έγινε χρήση της ισορροπίας του συσσωματώματος στην κατακόρυφη διεύθυνση ( $N_{\sigma,\pi} = w_{\sigma}$ ) και του 3<sup>ου</sup> νόμου Νεύτωνα ( $N'_{\sigma,\pi} = N_{\sigma,\pi}$ ).

Επομένως, η (2) λόγω της (3) γίνεται

$$v \leq \mu(2m + M)g \sqrt{\frac{2}{mk}}$$

Έτσι, η ζητούμενη μέγιστη τιμή του μέτρου της ταχύτητας του βλήματος ακριβώς πριν από την κρούση ώστε η πλατφόρμα να παραμείνει διαρκώς ακίνητη είναι ίση με:

$$v_{max} = \mu(2m + M)g \sqrt{\frac{2}{mk}}$$

# Υλικό Φυσικής – Χημείας

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

*Αριθμητική εφαρμογή:*

Έστω ότι

$$m = 2\text{kg}, \quad M = 6\text{kg}, \quad k = 400\text{N/m}, \quad \mu = 0,2, \quad g = 10\text{m/s}^2$$

Τότε

$$v_{max} = 0,2 \cdot (2 \cdot 2 + 6) \cdot 10 \sqrt{\frac{2}{2 \cdot 400}} \text{m/s} = 0,2 \cdot 10 \cdot 10 \sqrt{\frac{1}{400}} \text{m/s} \Rightarrow$$

$$v_{max} = \frac{0,2 \cdot 100}{20} \text{m/s} \Rightarrow v_{max} = 1\text{m/s}$$

*Μίλτος Καδιτζόγλου*

*miltoskadiltzoglou@gmail.com*