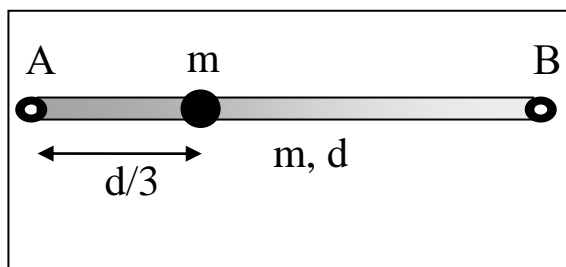


Κατακόρυφη περιστροφή στερεού

Ομογενής ράβδος μήκους d και μάζας m στηρίζεται οριζόντια σε δύο άρθρωσεις A και B . Σημειακή μάζα m είναι κολλημένη πάνω στη ράβδο σε σημείο που απέχει από το αριστερό της άκρο απόσταση $d/3$.



Κάποια χρονική στιγμή το στερεό που

αποτελείται από τη ράβδο και την σημειακή μάζα αφήνεται να περιστραφεί χωρίς τριβές εξαρτώμενο μόνο από την άρθρωση A . Η κινητική ενέργεια του στερεού όταν φτάσει στην κατακόρυφη θέση είναι K_A . Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, αλλά η περιστροφή γίνεται γύρω από την άρθρωση B και η κινητική ενέργεια του στερεού όταν φτάσει στην κατακόρυφη θέση είναι K_B . Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στο άκρο της $I_{\text{ράβδου}} = \frac{1}{3} md^2$.

A. Ο λόγος K_A/K_B ισούται με

- α. $4/7$ β. $5/4$ γ. $5/7$

B. Ο λόγος των ροπών αδράνειας του στερεού ως προς τα σημεία A και B , I_A/I_B , ισούται με

- α. $4/7$ β. $5/4$ γ. $5/7$

Γ. Ο λόγος των γωνιακών ταχυτήτων του στερεού όταν φτάσει στην κατακόρυφη θέση, ω_A/ω_B , ισούται με τη ρίζα του κλάσματος

- α. $4/7$ β. $5/4$ γ. $5/7$

Δ. Ποια είναι η συνάρτηση της κινητικής ενέργειας του στερεού στην κατακόρυφη θέση σε συνάρτηση με την απόσταση x της σημειακής μάζας από το αριστερό άκρο της ράβδου, αν η περιστροφή γίνεται γύρω από την άρθρωση A ; Να γίνει διάγραμμα.

Ε. Ποια είναι η συνάρτηση της ροπής αδράνειας του στερεού ως προς την άρθρωση A σε συνάρτηση με την απόσταση x της σημειακής μάζας από το αριστερό άκρο της ράβδου; Να γίνει το διάγραμμα.

Ζ. Ο λόγος των δυνάμεων που δέχεται η σημειακή μάζα από τη ράβδο στην οριζόντια θέση στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα, F_B/F_A , ισούται με

- α. $4/7$ β. $3/4$ γ. 0

Η. Ο λόγος των δυνάμεων που δέχεται η σημειακή μάζα από τη ράβδο στην κατακόρυφη θέση στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα, F_A/F_B , ισούται με

- α. $4/7$ β. $3/4$ γ. $5/8$

Η λύση

Α. Περιστροφή γύρω από το Α

Στην κίνηση της ράβδου, παράγει έργο μόνο το βάρος, άρα η ΑΔΜΕ δίνει

$$K_{1,αρχ} + U_{1,αρχ} = K_{2,τελ} + U_{2,τελ} \Rightarrow$$

$$0 + 2mgd = K_A + mg \frac{d}{2} + mg \frac{2d}{3} \Rightarrow$$

$$K_A = \frac{5}{6} mgd$$

Περιστροφή γύρω από το Β

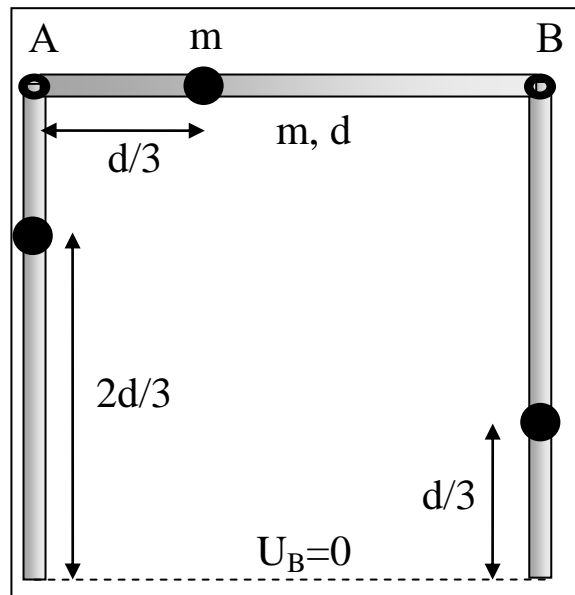
Η ΑΔΜΕ δίνει

$$K_{1,αρχ} + U_{1,αρχ} = K_{2,τελ} + U_{2,τελ} \Rightarrow$$

$$0 + 2mgd = K_B + mg \frac{d}{2} + mg \frac{d}{3} \Rightarrow$$

$$K_B = \frac{7}{6} mgd$$

Άρα, ο λόγος K_A/K_B ισούται με $5/7$ και σωστό είναι το γ.



Β. Ροπή αδράνειας του στερεού ως προς το Α

$$I_A = I_{\text{ράβδου}} + I_{\text{μάζας}} = \frac{1}{3} md^2 + m \left(\frac{d}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} md^2$$

Ροπή αδράνειας του στερεού ως προς το Β

$$I_B = I_{\text{ράβδου}} + I_{\text{μάζας}} = \frac{1}{3} md^2 + m \left(\frac{2d}{3} \right)^2 = \frac{7}{9} md^2$$

Άρα, ο λόγος I_A/I_B , ισούται με $4/7$ και σωστό είναι το α.

Γ. Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού όταν φτάσει στην κατακόρυφη θέση είναι

$$K_A = \frac{5}{6} mgd \Rightarrow \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 = \frac{5}{6} mgd \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{4}{9} md^2 \omega_A^2 = \frac{5}{6} mgd \Rightarrow \omega_A^2 = \frac{15g}{4d} \Rightarrow \omega_A = \sqrt{\frac{15g}{4d}}$$

$$K_B = \frac{7}{6} mgd \Rightarrow \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = \frac{7}{6} mgd \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{7}{9} md^2 \omega_B^2 = \frac{7}{6} mgd \Rightarrow \omega_B^2 = 3 \frac{g}{d} \Rightarrow \omega_B = \sqrt{3 \frac{g}{d}}$$

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{\sqrt{\frac{15g}{4d}}}{\sqrt{3 \frac{g}{d}}} = \frac{\sqrt{\frac{15}{4}}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Άρα, ο λόγος ω_A/ω_B , ισούται με τη ρίζα του κλάσματος $5/4$ και σωστό είναι το β.

Δ. Περιστροφή γύρω από το Α

Η ΑΔΜΕ δίνει

Μπετσάκος Παναγιώτης

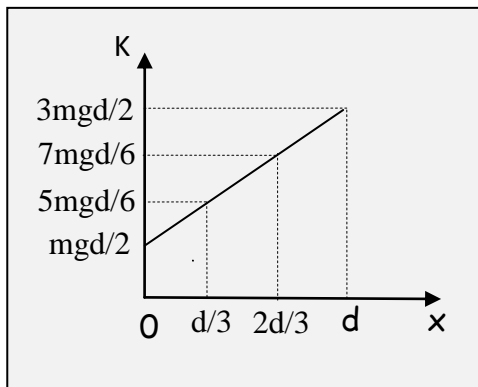
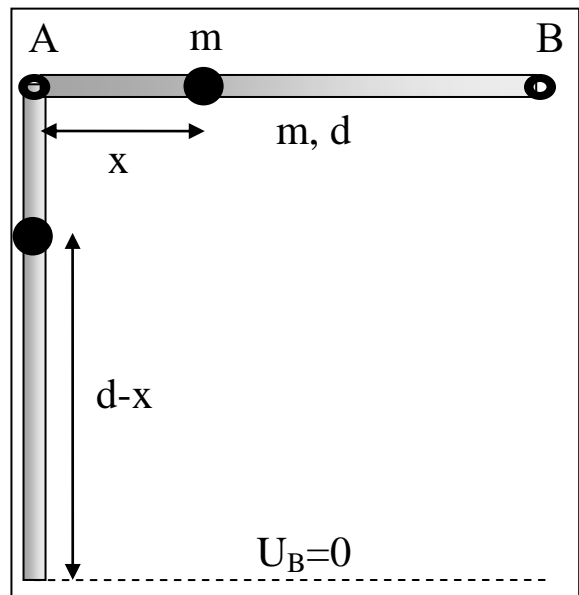
$$K_{1,αρχ} + U_{1,αρχ} = K_{2,τελ} + U_{2,τελ} \Rightarrow$$

$$0 + 2mgd = K + mg \frac{d}{2} + mg(d-x) \Rightarrow$$

$$K = \frac{1}{2}mgd + mgx$$

Παρατηρούμε ότι όσο απομακρύνεται η σημειακή μάζα από τον άξονα περιστροφής, μεγαλώνει γραμμικά η τελική κινητική ενέργεια του στερεού, γιατί μικραίνει η τελική δυναμική του ενέργεια.

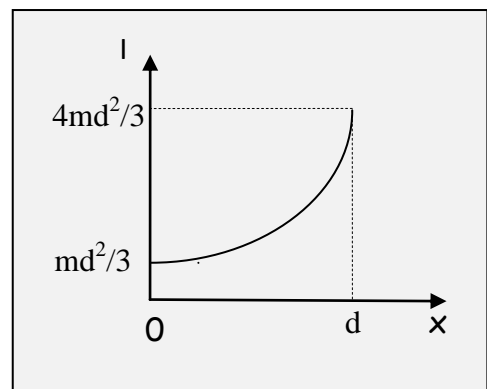
Το διάγραμμα της κινητική ενέργειας του στερεού στην κατακόρυφη θέση σε συνάρτηση με την απόσταση x της σημειακής μάζας από το αριστερό άκρο της ράβδου, αν η περιστροφή γίνεται γύρω από την άρθρωση A, δείχνεται παρακάτω.



Ε. Η συνάρτηση της ροπής αδράνειας του στερεού ως προς το σημείο A, σε συνάρτηση με την απόσταση x της σημειακής μάζας από το αριστερό άκρο της ράβδου είναι

$$I_A = I_{\text{ράβδου}} + I_{\text{μάζας}} = \frac{1}{3}md^2 + mx^2$$

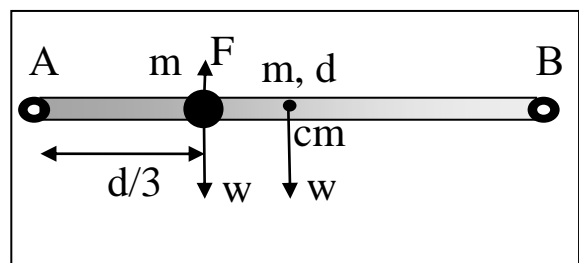
Το διάγραμμα δείχνεται δίπλα.



Z. Περιστροφή γύρω από το A

Η δύναμη που δέχεται η σημειακή μάζα από τη ράβδο στην οριζόντια θέση είναι η δύναμη που μαζί με το βάρος της, της προσδίδει την επιτρόχιο επιτάχυνσή της. Κεντρομόλο επιτάχυνση δεν έχει, καθώς δεν έχει αρχικά ταχύτητα.

Θα βρούμε την γωνιακή επιτάχυνση του στερεού τη χρονική στιγμή που αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.



Μπετσάκος Παναγιώτης

$$\Sigma \tau_A = I_A \alpha_{\gamma\omega\nu, A} \Rightarrow mg \frac{d}{3} + mg \frac{d}{2} = \frac{4}{9} md^2 \alpha_{\gamma\omega\nu, A} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu, A} = \frac{15 g}{8 d}$$

Η επιτρόχιος επιτάχυνση της σημειακής μάζας είναι

$$\alpha_{\epsilon, A} = \frac{d}{3} \alpha_{\gamma\omega\nu, A} = \frac{d}{3} \frac{15 g}{8 d} \Rightarrow \alpha_{\epsilon, A} = \frac{5}{8} g$$

Η δύναμη που δέχεται η σημειακή μάζα από τη ράβδο στην οριζόντια θέση είναι

$$\Sigma F = w - F_A = m \alpha_{\epsilon, A} = \frac{5}{8} mg \Rightarrow F_A = \frac{3}{8} mg$$

Περιστροφή γύρω από το B

$$\Sigma \tau_B = I_B \alpha_{\gamma\omega\nu, B} \Rightarrow mg \frac{2d}{3} + mg \frac{d}{2} = \frac{7}{9} md^2 \alpha_{\gamma\omega\nu, B} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu, B} = \frac{3 g}{2 d}$$

Η επιτρόχιος επιτάχυνση της σημειακής μάζας είναι

$$\alpha_{\epsilon, B} = \frac{2d}{3} \alpha_{\gamma\omega\nu, B} = \frac{2d}{3} \frac{3 g}{2 d} \Rightarrow \alpha_{\epsilon, B} = g$$

Η δύναμη που δέχεται η σημειακή μάζα από την ράβδο στην οριζόντια θέση είναι

$$\Sigma F = w - F_B = m \alpha_{\epsilon, B} = mg \Rightarrow F_B = 0$$

Ο λόγος των δυνάμεων που δέχεται η σημειακή μάζα από την ράβδο στην οριζόντια θέση στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα, F_B/F_A , ισούται με 0 και σωστό είναι το γ.

Η. Περιστροφή γύρω από το A

Η δύναμη που δέχεται η σημειακή μάζα από τη ράβδο στην κατακόρυφη θέση είναι η δύναμη που μαζί με το βάρος της, της προσδίδει την κεντρομόλο επιτάχυνσή της. Επιτρόχιο επιτάχυνση δεν έχει, καθώς δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση το στερεό τη χρονική στιγμή που είναι κατακόρυφο, αφού τα βάρη των δύο σωμάτων δεν έχουν ροπή.

Η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται η σημειακή μάζα είναι

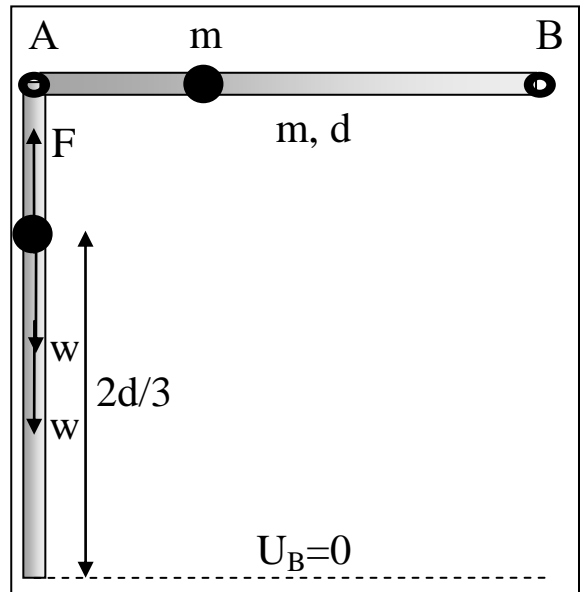
$$F_{\kappa, A} = m \frac{v_A^2}{\frac{d}{3}} = m \omega_A^2 \frac{d}{3} = m \frac{15 g d}{4 d 3} \Rightarrow$$

$$F_A - w = \frac{5}{4} mg \Rightarrow F_A = \frac{9}{4} mg$$

Περιστροφή γύρω από το B

$$F_{\kappa, B} = m \frac{v_B^2}{\frac{2d}{3}} = m \omega_B^2 \frac{2d}{3} = m 3 \frac{g}{d} \frac{2d}{3} \Rightarrow F_B - w = 2mg \Rightarrow F_B = 3mg$$

Ο λόγος των δυνάμεων που δέχεται η σημειακή μάζα από τη ράβδο στην κατακόρυφη θέση στις δύο περιπτώσεις αντίστοιχα, F_A/F_B , ισούται με 3/4, δηλαδή σωστό είναι το β.



Μερικές και ολικές εξαρθρώσεις

Ήταν αγαπημένη σου κουβέντα:
«πόσο σχετικά είναι όλα», θυμάσαι;
Στις μισές κουβέντες που έλεγες
η φυσική σου σε επηρέαζε.
Είχαμε, θυμάμαι, συναρθρωθεί
γύρω από δύο άξονες, σταθερά,
την αγάπη και την εμπιστοσύνη,
μα πολλές φορές κάτι κλωνιζόταν,
κι έσπαγε κάποιος φθαρμένος άξονας
κι εμείς ελεύθεροι μα κι εξαρτημένοι
κινούμασταν στροφικά σε χώρο κενό,
με τις εσωτερικές μας δυνάμεις
να μας κρατούν ενωμένους σ' ένα σώμα.
Ύστερα από μια δυο παλινδρομές
επιστρέψαμε στην αρχική μας θέση
και κει πάνω συνεχίζαμε να ζούμε
στη σταθερή κι ασφαλή οικειότητα.

Κάποτε σπάσανε όλες οι αρθρώσεις
και γίναμε δύο τρομαγμένα πουλιά
που κοιμούνται χωριστά στην κρύα γη
που μοιραστήκαμε στον αχανή ουρανό
που δεν προλάβαμε ν' κρατήσουμε
κανένα ίχνος της κοινής μας πορείας,
και τώρα ψαχνόμαστε, μα δυστυχώς
λιγοστεύουν τα φτεροκοπήματά μας.