

# Προσέγγιση Hertz στην κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών

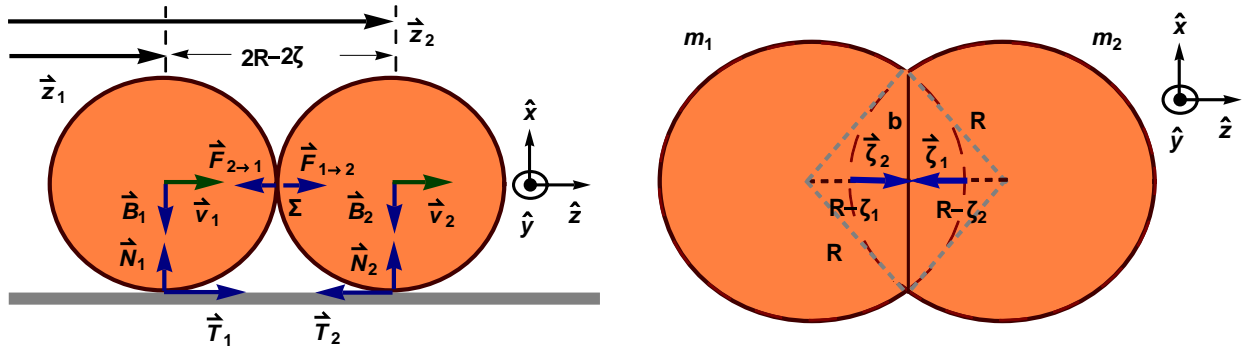
---



## Περιεχόμενα

I.	Το πρόβλημα.....	2
II.	Δυναμική μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών .....	3
	α) Νόμοι του Νεύτωνα για την κίνηση των δύο σωμάτων .....	3
	β) Δυνάμεις, ορμή και στροφορμή του συστήματος.....	4
	γ) Εξισώσεις κίνησης.....	5
III.	Ενεργειακή μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών .....	6
	α) Δυναμική και μηχανική ενέργεια του συστήματος .....	6
	β) Χρόνος αλληλεπίδρασης και μέγιστη παραμόρφωση κάθε σφαίρας.....	6
IV.	Η προσέγγιση Hertz για τις ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης κάθε σφαίρας .....	8
V.	Συνθήκη μη ολίσθησης .....	10
VI.	Αριθμητικές λύσεις .....	10
	α) Ένα παράδειγμα με κύλιση.....	10
	β) Ένα παράδειγμα χωρίς κύλιση.....	11
VII.	Κεντρική κρούση με ολίσθηση των δύο σφαιρών.....	13
	α) Διαφορική εξίσωση της παραμόρφωσης και εξισώσεις κίνησης.....	13
	β) Ένα παράδειγμα με ολίσθηση .....	15
	γ) Ένα παράδειγμα από το μπιλιάρδο .....	17
VIII.	Σχόλια.....	18
IX.	Βιβλιογραφία .....	18

## I. Το πρόβλημα



Σχήμα 1

Στο σχήμα απεικονίζονται δύο σφαίρες με ίσες ακτίνες, κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους σε μία κεντρική κρούση.

Θεωρούμε δύο ομογενή σφαιρικά στερεά «1» και «2», με ίσες ακτίνες  $R_1 = R_2 = R$ , μάζες  $m_1$  και  $m_2$  και κύριες ροπές αδράνειας  $I_1 = \lambda m_1 R^2$  και  $I_2 = \lambda m_2 R^2$  αντίστοιχα. Οι σφαίρες κυλίνουν πάνω σε οριζόντια επιφάνεια με ταχύτητες ίδιας διεύθυνσης  $\vec{u}_1 = u_1 \hat{z}$  και  $\vec{u}_2 = u_2 \hat{z}$  και την χρονική στιγμή μηδέν τα δύο σώματα συγκρούονται. Θεωρούμε αφ' ενός μεν ότι κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασης των δύο σωμάτων δεν ασκούνται δυνάμεις τριβής μεταξύ των επιφανειών τους, αφ' έτερου δε ότι σε όλη την διάρκεια του φαινομένου της αλληλεπίδρασης ασκούνται δυνάμεις τριβής από το δάπεδο στα στερεά. Συνεπώς θεωρούμε ότι τόσο πριν, τόσο μετά, όσο και κατά την διάρκεια της κρούσης οι δύο σφαίρες δεν ολισθαίνουν στο οριζόντιο δάπεδο, οπότε οι όποιες δυνάμεις τριβής με αυτό είναι στατικές.

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι κάθε στερεό είναι ελαστικό, με το ίδιο μέτρο ελαστικότητας του Young  $\epsilon$  και ότι κάθε σφαίρα ασκεί στην άλλη δυνάμεις ίσων μέτρων και αντίθετων κατευθύνσεων, της μορφής  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -|F_{2 \rightarrow 1}| \hat{z}$  και  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = |F_{1 \rightarrow 2}| \hat{z}$  (δες σχήμα 1). Είναι λογικό να υποθέσουμε στο σημείο αυτό ότι οι ελαστικές αυτές δυνάμεις θα έχουν αντίθετη φορά από το διάνυσμα της διαμήκου παραμόρφωση  $\vec{\zeta}_{1,2}$  κάθε σφαίρας στον άξονα της μεταφορικής της ταχύτητας (στον άξονα  $z$  της διακέντρου). Συγκεκριμένα και εφ' όσον σύμφωνα με την γεωμετρία του σχήματος 1,  $\vec{\zeta}_1 = -\zeta_1 \hat{z}$  και  $\vec{\zeta}_2 = \zeta_2 \hat{z}$ , μπορούμε να γράψουμε για τις δυνάμεις αυτές τις σχέσεις

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -|F_{1 \rightarrow 2}| \frac{\vec{\zeta}_1}{|\vec{\zeta}_1|} = |F_{1 \rightarrow 2}| \hat{z} \quad (2a), \quad \vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -|F_{2 \rightarrow 1}| \frac{\vec{\zeta}_2}{|\vec{\zeta}_2|} = -|F_{2 \rightarrow 1}| \hat{z} \quad (2b).$$

Εφ' όσον οι δύο σφαίρες έχουν την ίδια ακτίνα και το ίδιο μέτρο ελαστικότητας, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι θα ανταποκρίνονται με τον ίδιο τρόπο στις πιέσεις που ασκούνται στην επιφάνειά τους κατά την διάρκεια της επαφής τους. Συνεπώς θεωρούμε ότι τα μέτρα των δύο αυτών δυνάμεων είναι ίσα μεταξύ τους και ότι εξαρτώνται από την διαμήκη παραμόρφωση  $\zeta$  κάθε σφαίρας στον άξονα της μεταφορικής της κίνησης, διαφορετικά ισχύει για τα μέτρα των δύο δυνάμεων μία γενική σχέση της μορφής  $|F_{2 \rightarrow 1}| = |F_{1 \rightarrow 2}| = F(\zeta)$ . Η ακριβής αναλυτική μορφή της συνάρτησης  $F(\zeta)$  θα συζητηθεί σε επόμενη παράγραφο. Λαμβάνοντας υπ' όψιν όλα τα παραπάνω οι δυνάμεις που ασκεί κάθε σφαίρα στην άλλη, λόγω της ελαστικής της παραμόρφωσης είναι της μορφής

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = F(\zeta) \hat{z} \quad (3).$$

Βάσει των παραπάνω, η κρούση των δύο σφαιρών χαρακτηρίζεται ως κεντρική, εφ' όσον τα διανύσματα των μεταφορικών ταχυτήτων των κέντρων των δύο σωμάτων βρίσκονται πάνω στην ευθεία της διακέντρου τους, και ελαστική, εξ' αιτίας της ελαστικής φύσης των δυνάμεων αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων κατά την κρούση.

Στην συνέχεια η κύλιση των δύο στερεών στο οριζόντιο επίπεδο, επιβάλλει στην μεταφορική κίνησή τους δεσμούς

$$\dot{z}_1 = \dot{\theta}_1 R \quad (4\alpha), \quad \dot{z}_2 = \dot{\theta}_2 R \quad (4\beta), \quad \ddot{z}_1 = \ddot{\theta}_1 R \quad (4\gamma), \quad \ddot{z}_2 = \ddot{\theta}_2 R \quad (4\delta).$$

Οι δε βαθμοί ελευθερίας του συστήματος εξ' αιτίας της γεωμετρίας των δύο στερεών, πρέπει να ικανοποιούν επιπλέον κατά την διάρκεια της επαφής τους, τους δεσμούς

$$z_2 - z_1 = 2R - 2\zeta \quad (5\alpha), \quad \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = -2\dot{\zeta} \quad (5\beta), \quad \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -2\ddot{\zeta} \quad (5\gamma).$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι κατά την έναρξη της κρούσης το κέντρο μάζας της σφαίρας «1» βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, οπότε η μεταφορική κίνηση των δύο στερεών έχει ως αρχικές συνθήκες τις

$$z_1(0) = 0 \quad (6\alpha), \quad \dot{z}_1(0) = u_1 \quad (6\beta), \quad z_2(0) = 2R \quad (6\gamma), \quad \dot{z}_2(0) = u_2 \quad (6\delta).$$

## II. Δυναμική μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών

### α) Νόμοι του Νεύτωνα για την κίνηση των δύο σωμάτων

Αρχίζουμε την δυναμική μελέτη του συστήματος, με την εφαρμογή σε κάθε σώμα του δευτέρου νόμου του Νεύτωνα για την μεταφορική του κίνηση κατά μήκος του άξονα  $\hat{x}$ , και την περιστροφική του κίνηση κατά μήκος του άξονα  $\hat{y}$ :

$$\left. \begin{aligned} T_1 - F(\zeta) &= m_1 \ddot{x}_1 \quad (7\alpha) \\ T_1 R &= -\lambda m_1 R^2 \ddot{\theta}_1 \Rightarrow -T_1 = \lambda m_1 \ddot{x}_1 \quad (7\beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{z}_1(t) = -\frac{1}{\lambda + 1} \frac{F(\zeta)}{m_1} \quad (8)$$

και

$$\left. \begin{aligned} F(\zeta) - T_2 &= m_2 \ddot{z}_2 \quad (9\alpha) \\ -T_2 R &= -\lambda m_2 R^2 \ddot{\theta}_2 \Rightarrow T_2 = \lambda m_2 \ddot{z}_2 \quad (9\beta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \ddot{z}_2(t) = +\frac{1}{\lambda + 1} \frac{F(\zeta)}{m_2} \quad (10).$$

Η συνθήκη δεσμού (5γ), δίνει την διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η χρονική συνάρτηση της διαμήκουσ παραμόρφωσης  $\zeta(t)$  κάθε στερεού, κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους, συγκεκριμένα

$$\ddot{\zeta}(t) + \frac{1}{\lambda + 1} \frac{1}{2M} F[\zeta(t)] = 0 \quad (11), \quad \text{όπου} \quad M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (12)$$

η ανηγμένη μάζα του συστήματος των δύο σφαιρών.

Γνωρίζουμε επίσης ότι η παραμόρφωση κάθε σφαίρας είναι μηδενική στην αρχή της αλληλεπίδρασής και ότι ο ρυθμός μεταβολής της πρέπει να ισούται με το ήμισυ της αρχικής σχετικής μεταφορικής ταχύτητας των δύο σφαιρών. Συνεπώς η λύση της διαφορικής εξίσωσης (11) πρέπει να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

$$\zeta(0) = 0 \quad (13a), \quad \dot{\zeta}(0) = \frac{u_1 - u_2}{2} \quad (13\beta)^1.$$

Είναι προφανές ότι η διαφορική εξίσωση (11) δεν επιδέχεται αναλυτικές λύσεις (εκτός της τετριμμένης περίπτωσης των δυνάμεων Hooke, όπου  $\vec{F}(\zeta) = -k\vec{\zeta}$ ), οπότε όταν χρειαστεί και εφ' όσον έχει προσδιοριστεί η ακριβής αναλυτική έκφραση της δύναμης παραμόρφωσης, οι λύσεις της εξίσωσης θα προσδιορισθούν με αριθμητικές μεθόδους.

## β) Δυνάμεις, ορμή και στροφορμή του συστήματος

Οι στατικές τριβές τώρα, υπολογίζονται αν αντικαταστήσουμε τις μεταφορικές επιταχύνσεις (8) και (10) στις σχέσεις (7β) και (9β), συγκεκριμένα

$$T_1(t) = T_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + 1} F(t) \quad (14)$$

και προκύπτουν ίσες μεταξύ τους σε όλη την διάρκεια του φαινομένου. Συνεπώς η συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο σύστημα των δύο σφαιρών ισούται με το μηδέν, εφ' όσον στον άξονα της κίνησης  $\hat{z}$  ισχύει ότι

$$\sum \vec{F}_z(t) = \vec{T}_1(t) + \vec{T}_2(t) = [T_1(t) - T_2(t)]\hat{z} = 0 \quad (15).$$

Έπεται ότι η ορμή του συστήματος των δύο στερεών, η οποία σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από την σχέση  $\vec{p}(t) = m_1\dot{z}_1(t)\hat{z} + m_2\dot{z}_2(t)\hat{z}$ , προκύπτει σταθερή και ίση με αυτήν στην έναρξη της αλληλεπίδρασης των δύο σωμάτων, ήτοι

$$\vec{p} = (m_1u_1 + m_2u_2)\hat{z} \quad (16).$$

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε την χρονική εξάρτηση της μετατόπισης του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο στερεών. Αρχικά παρατηρούμε ότι λόγω της συμμετρίας κάθε σφαίρας και εφ' όσον οι ακτίνες τους είναι ίσες, η συντεταγμένη του κέντρου μάζας βρίσκεται συνεχώς πάνω στον άξονα της διακέντρου (υποθέσαμε μόνον διαμήκεις παραμορφώσεις για κάθε στερεό, πάνω στον άξονα της μεταφορικής του κίνησης), συγκεκριμένα

$$z_{\text{cm}}(t) = \frac{m_1z_1(t) + m_2z_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}R + \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2}t \quad (17).$$

Συμπεραίνουμε δηλαδή ότι το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (άμεση συνέπεια του πρώτου νόμου του Νεύτωνα (15) για το σύστημα των δύο σωμάτων), με σταθερή ταχύτητα μέτρου

$$V = \frac{m_1u_1 + m_2u_2}{m_1 + m_2} = \frac{p}{m_1 + m_2} \quad (18).$$

<sup>1</sup> Στην επιλογή αυτήν για την αρχική ταχύτητα παραμόρφωσης καταλήγουμε αν παρατηρήσουμε ότι τα κέντρα των δύο στερεών την χρονική στιγμή της έναρξης της κρούσης πλησιάζουν μεταξύ τους με σχετική ταχύτητα  $u_1 - u_2$  και ότι τα διανύσματα του ρυθμού μεταβολής της παραμόρφωσης κάθε στερεού στον άξονα της μεταφορικής τους ταχύτητας, είναι αντίθετα, ήτοι  $\dot{\zeta}_1 = -\dot{\zeta}_2$ . Συνεπώς θα πρέπει ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης κάθε σώματος να ισούται με το ήμισυ της σχετικής ταχύτητας των δύο κέντρων τους.

Όσον αφορά την στροφορμή του συστήματος, παρατηρούμε ότι κάθε στερεό σώμα έχει μία στροφορμή λόγω της ιδιοπεριστροφής του (spin) στην διεύθυνση του άξονα  $\hat{y}$  και ενδεχομένως μία τροχιακή στροφορμή λόγω της μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας του (η οποία εξαρτάται από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται). Αν επιλέξουμε να υπολογίσουμε την ολική στροφορμή του συστήματος ως προς τυχαίο σημείο του άξονα  $\hat{z}$  των μεταφορικών ταχυτήτων, τότε η τροχιακή στροφορμή κάθε σώματος μηδενίζεται, οπότε η συνολική στροφορμή του συστήματος ισούται με το άθροισμα των στροφορμών λόγω ιδιοπεριστροφής κάθε στερεού, ήτοι  $\vec{L}_S(t) = \vec{L}_{S,1}(t) + \vec{L}_{S,2}(t) = -[I_1\dot{\theta}_1(t) + I_2\dot{\theta}_2(t)]\hat{y}$ . Αλλά η ποσότητα μέσα στην αγκύλη ισούται με  $\lambda p(t)R$ , οπότε η συνολική στροφορμή προκύπτει επίσης σταθερή και ίση με

$$\vec{L}_S(t) = -\lambda p(t)R\hat{y} = -\lambda(m_1u_1 + m_2u_2)R\hat{y} \quad (19).$$

Και αυτό το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, εφ' όσον η συνισταμένη των εξωτερικών ροπών ως προς σημείο  $\Sigma$  της διακέντρου ισούται με το μηδέν. Για παράδειγμα για το μέσον της διακέντρου

$$\sum \vec{\tau}_\Sigma(t) = (N_1 - B_1)[R - \zeta(t)]\hat{y} + (B_2 - N_2)[R - \zeta(t)]\hat{y} + [T_1(t) - T_2(t)]R\hat{y} = 0 \quad (20).$$

### γ) Εξισώσεις κίνησης

Οι εξισώσεις της ταχύτητας των δύο σφαιρών κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους, προκύπτουν τώρα μέσω της σταθερής ορμής  $p = m_1u_1 + m_2u_2$  και της αρχικής συνθήκης (5β). Συγκεκριμένα τα δύο αυτά αποτελέσματα δίνουν ένα σύστημα ως προς τις μεταφορικές ταχύτητες κάθε σφαίρας, συγκεκριμένα,

$$m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2 = p, \quad \dot{z}_2 - \dot{z}_1 = -2\dot{\zeta},$$

με λύσεις

$$\dot{z}_1(t) = \frac{p}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\dot{\zeta}(t) \quad (21\alpha), \quad \dot{z}_2(t) = \frac{p}{m_1 + m_2} - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\dot{\zeta}(t) \quad (21\beta).$$

Στην συνέχεια ολοκληρώνοντας τα δύο τελευταία αποτελέσματα προκύπτουν οι χρονικές εξισώσεις της θέσης του κέντρου κάθε σφαίρας πάνω στον άξονα  $z$ , ήτοι

$$z_1(t) = \int \dot{z}_1(t)dt = \frac{p}{m_1 + m_2}t + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\zeta(t) + c_1,$$

$$z_2(t) = \int \dot{z}_2(t)dt = \frac{p}{m_1 + m_2}t - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\zeta(t) + c_2,$$

όπου σύμφωνα με τις αρχικές συνθήκες (6α,γ) και (13α), οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι ίσες με  $c_1 = 0$  και  $c_2 = 2R$ . Συνεπώς η χρονική εξάρτηση της οριζόντιας συντεταγμένης του κέντρου κάθε σφαίρας δίνεται από τις συναρτήσεις

$$z_1(t) = \frac{p}{m_1 + m_2}t + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\zeta(t) \quad (22\alpha), \quad z_2(t) = \frac{p}{m_1 + m_2}t - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\zeta(t) + 2R \quad (22\beta).$$

### III. Ενεργειακή μελέτη της αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών

#### α) Δυναμική και μηχανική ενέργεια του συστήματος

Στην ελαστική θεωρία, η δυναμική ενέργεια  $U$  που αποθηκεύεται σε κάθε σφαίρα εξ' αιτίας της διαμήκουσ παραμόρφωσής της κατά μία ποσότητα  $\zeta$ , υπολογίζεται μέσω του ολοκληρώματος του έργου της δύναμης παραμόρφωσής<sup>2</sup> του στερεού, συγκεκριμένα,

$$U(\zeta) = \int_0^{\zeta} F(s) ds \quad (23).$$

Έπεται ότι η μηχανική ενέργεια του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή κατά την διάρκεια της κρούσης ισούται με  $E(t) = K(t) + 2U(t)$ , όπου  $K(t)$  η κινητική ενέργεια των δύο σωμάτων και  $U(t) \equiv U[\zeta(t)]$ , ή

$$E(t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2(t) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2(t) + 2U(t),$$

η οποία με την βοήθεια των δεσμών (4α,β) λαμβάνει την πιο συμπυκνωμένη μορφή

$$E(t) = \frac{\lambda + 1}{2} \left[ m_1 \dot{z}_1^2(t) + m_2 \dot{z}_2^2(t) + \frac{4}{\lambda + 1} U(t) \right] \quad (24).$$

Τώρα μέσω των αποτελεσμάτων (21α,β) η μηχανική ενέργεια του συστήματος λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή

$$E(t) = \frac{\lambda + 1}{2} \left[ 4M \dot{\zeta}^2(t) + \frac{4}{\lambda + 1} U(t) + \frac{p^2}{(m_1 + m_2)} \right] \quad (25).$$

#### β) Χρόνος αλληλεπίδρασης και μέγιστη παραμόρφωση κάθε σφαίρας

Το υπό μελέτη σύστημα είναι συντηρητικό εξαιτίας της κύλισης και του ελαστικού χαρακτήρα της αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών. Συνεπώς σύμφωνα με την διατήρηση της ενέργειας, η μηχανική ενέργεια του συστήματος (25) ισούται σε κάθε χρονική στιγμή με την τιμή της στην χρονική στιγμή μηδέν, δηλαδή με την αρχική κινητική ενέργεια των δύο στερεών, ή

$$E(t) = \frac{\lambda + 1}{2} (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) \Rightarrow 4M \dot{\zeta}^2(t) + \frac{4}{\lambda + 1} U(t) = (m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2) - \frac{p^2}{(m_1 + m_2)}.$$

Το δεύτερο μέλος της τελευταίας ισότητας προκύπτει μετά από λίγες πράξεις ίσο με  $M(u_1 - u_2)^2$ , οπότε η χρονική συνάρτηση  $\zeta(t)$  της παραμόρφωσης κάθε σφαίρας ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση,

$$4M \left( \frac{d\zeta(t)}{dt} \right)^2 + \frac{4}{\lambda + 1} U(t) = M(u_1 - u_2)^2 \Rightarrow \frac{d\zeta(t)}{dt} = \sqrt{A - BU(t)} \quad (28),$$

όπου  $A$  και  $B$  οι σταθερές ποσότητες

$$A = \left( \frac{u_1 - u_2}{2} \right)^2 \quad (28a), \quad B = \frac{1}{\lambda + 1} \frac{1}{M} \quad (28b).$$

<sup>2</sup> Υπό την προϋπόθεση, βεβαίως, ότι η συνάρτηση  $F(\zeta)$  της δύναμης της ελαστικής παραμόρφωσης μας είναι γνωστή.

Επίσης γνωρίζουμε ότι η χρονική συνάρτηση της παραμόρφωσης  $\zeta(t)$  των δύο στερεών πρέπει να είναι συμμετρική ως προς την χρονική στιγμή  $\tau/2$ . Συγκεκριμένα είναι προφανές ότι αρχικά η σφαίρα «1» θα επιβραδύνεται μεταφορικά λόγω της δύναμης  $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  που της ασκεί η σφαίρα «2». Ταυτόχρονα η σφαίρα «2» θα επιταχύνεται μεταφορικά λόγω της αντίθετης δύναμης  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$  που της ασκεί η σφαίρα «1». Σε όλο το χρονικό αυτό διάστημα τα κέντρα των δύο στερεών θα πλησιάζουν και η βράχυνσή τους θα αυξάνει.

Σε κάποια χρονική στιγμή  $t = t_1$  οι ταχύτητες των δύο στερεών θα εξισωθούν και τότε παρατηρείται η μέγιστη παραμόρφωση σε κάθε σώμα (θυμηθείτε ότι οι δύο σφαίρες παραμορφώνονται ισόποσα στον άξονα της κίνησης γιατί έχουν ίσες ακτίνες και ίδιο μέτρο ελαστικότητας  $\mathcal{E}$ ). Στην συνέχεια η ταχύτητα της σφαίρας «2» θα συνεχίσει να αυξάνει και της «1» να ελαττώνεται, οπότε τώρα τα κέντρα των δύο σφαιρών θα απομακρύνονται, οπότε η βράχυνση θα ελαττώνεται. Σε κάποια χρονική στιγμή  $t = \tau$  οι σφαίρες (ως τέλεια ελαστικά σώματα) θα αποκτήσουν το αρχικό τους σχήμα και η αλληλεπίδρασή τους (κρούση) θα σταματήσει. Εξ' αιτίας συμμετριών του προβλήματος, αναμένεται ότι η χρονική στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης κάθε στερεού θα ισούται με  $t_1 = \tau/2$ . Επίσης αναμένεται ότι ο ρυθμός μεταβολής  $\dot{\zeta}$  της παραμόρφωσης κάθε σφαίρας, θα ισούται με το μηδέν την χρονική στιγμή  $\tau/2$ , όπου η παραμόρφωση  $\zeta$  θα είναι μέγιστη.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι εφ' όσον σύμφωνα με το αποτέλεσμα (28) ο ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης πρέπει να μηδενίζεται την χρονική στιγμή  $\tau/2$ , η μέγιστη παραμόρφωση  $\zeta_{\max} = \zeta(\tau/2)$  κάθε σφαίρας προκύπτει από την λύση της εξίσωσης<sup>3</sup>

$$\left. \frac{d\zeta(t)}{dt} \right|_{t=\tau/2} = 0 \Rightarrow \sqrt{A - BU(\zeta_{\max})} = 0 \Rightarrow U(\zeta_{\max}) = \frac{A}{B} \quad (29).$$

Στην συνέχεια αν διαχωρίσουμε τις μεταβλητές  $\zeta$  και  $t$ , η διαφορική εξίσωση (28) λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή

$$dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{A} \sqrt{1 - \frac{B}{A} U(\zeta)}} \quad (30).$$

Η εξίσωση (30) επιλύεται αν ολοκληρώσουμε κατά μέλη, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι στο χρονικό διάστημα 0 έως  $\tau/2$ , όπου  $\tau$  ο συνολικός χρόνος αλληλεπίδρασης των δύο στερεών, η παραμόρφωση γίνεται από μηδέν (0), μέγιστη ( $\zeta_{\max}$ ). Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\int_0^{\tau/2} dt = \frac{1}{\sqrt{A}} \int_0^{\zeta_{\max}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{B}{A} U(\zeta)}} \Rightarrow \tau = \frac{2}{\sqrt{A}} \int_0^{\zeta_{\max}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{B}{A} U(\zeta)}} \quad (31).$$

Τέλος, η τιμή του ρυθμού μεταβολής της παραμόρφωσης κάθε σφαίρας στο πέρας της κρούσης, προκύπτει από το γνωστό κριτήριο ελαστικότητας της αλληλεπίδρασης των δύο στερεών

$$\frac{\dot{x}_1(\tau) - \dot{x}_2(\tau)}{u_1 - u_2} = -1 \quad (32),$$

<sup>3</sup> Υπό την προϋπόθεση, βεβαίως, ότι τώρα η συνάρτηση  $U(\zeta)$  για την δυναμική ενέργεια της ελαστικής παραμόρφωσης μας είναι γνωστή.

το οποίο μέσω των συναρτήσεων (21α,β) για τις ταχύτητες του κέντρου μάζας κάθε σφαίρας, γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{2\dot{\zeta}(\tau)}{u_1 - u_2} = -1 \Rightarrow \dot{\zeta}(\tau) = -\frac{u_1 - u_2}{2} \quad (33).$$

Διαφορετικά, στο πέρας της αλληλεπίδρασης ο ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης κάθε σφαίρας είναι αντίθετος από τον αντίστοιχο ρυθμό μεταβολής στην αρχή του φαινομένου.

#### IV. Η προσέγγιση Hertz για τις ελαστικές δυνάμεις παραμόρφωσης κάθε σφαίρας

Στην συνέχεια θα αναζητήσουμε μία αναλυτική έκφραση για την δύναμη λόγω παραμόρφωσης που αναπτύσσεται σε κάθε σφαίρα. Αν σε ένα μονοδιάστατο σώμα, όπως μία λεπτή ράβδος, ασκήσουμε μία δύναμη στον άξονα του σώματος, τότε ο εφελκυσμός ή η βράχυνσή του δημιουργεί δυνάμεις τύπου Hooke, δηλαδή της μορφής  $F(\zeta) = -k\zeta$ , όπου  $\zeta$  το διάνυσμα της παραμόρφωσης και  $k$  σταθερά η οποία εξαρτάται από το μήκος της ράβδου και από το μέτρο ελαστικότητας του Young που χαρακτηρίζει το υλικό της ράβδου.

Όταν όμως δύο σφαίρες οι οποίες βρίσκονται αρχικά σε απλή επαφή (άρα έχουν ένα μόνον κοινό σημείο επαφής), πιεστούν η μία πάνω στην άλλη μέσω εξωτερικών δυνάμεων στον άξονα της διακέντρου τους, τότε θα αναπτυχθεί μεταξύ τους μία επιφάνεια επαφής, στην οποία θα κατανέμεται η επικρατούσα πίεση. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η παραμόρφωση κάθε σφαίρας είναι σχετικά μικρή εν συγκρίσει με τις διαστάσεις του σώματος (δηλαδή η διαμήκης παραμόρφωση κάθε σφαίρας είναι πολύ μικρότερη της ακτίνας της), ότι η επιφάνεια επαφής είναι κυκλική και ότι ο χρόνος παραμόρφωσης είναι πολύ μικρός εν συγκρίσει με τον χρόνο που απαιτείται για να διαδοθούν μηχανικά κύματα από το ένα άκρο της σφαίρας στο άλλο, τότε οι δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω της κατανομής της πίεσης στην επιφάνεια επαφής, λαμβάνουν την μορφή<sup>4</sup>

$$F(\zeta) = \frac{4}{3} D \zeta^{3/2} \quad (34) \quad \text{όπου} \quad D = \frac{\varepsilon \sqrt{R}}{1 - \sigma^2} \quad (35).$$

Η ποσότητα  $D$  είναι μία σταθερά με διαστάσεις στο SI,  $\text{Kg m}^{-1/2} \text{s}^{-2}$ , η οποία εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά των δύο σφαιρών. Συγκεκριμένα τις πειραματικά μετρήσιμες ποσότητες του μέτρου ελαστικότητας του Young  $\varepsilon$  (με μονάδες τάσης/πίεσης) και του αδιάστατου λόγου του Poisson  $\sigma$  μεταξύ του εγκάρσιου εφελκυσμού προς την διαμήκη βράχυνση κάθε σώματος κατά την παραμόρφωση (λαμβάνει τιμές στο διάστημα  $0 < \sigma < 0.5$ , (Landau & Lifshitz, 1970)) και τέλος, την ακτίνα  $R$  κάθε σφαίρας. Η παραπάνω λύση για το πρόβλημα της ελαστικής επαφής μεταξύ δύο επιφανειών προτάθηκε αρχικά από τον Hertz το 1880, και οι δυνάμεις αυτού του τύπου μεταξύ δύο επιφανειών όπου συμπίεζεται η μία πάνω στην άλλη καλούνται δυνάμεις Hertz.

Τώρα η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται εξαιτίας της παραμόρφωσης σε κάθε σφαίρα, δίνεται ολοκληρώνοντας την σχέση (34) ως προς την μεταβλητή  $\zeta$ ,

<sup>4</sup> Η απόδειξη του τύπου (34) εμπλέκει τους τανυστές πίεσης και παραμόρφωσης των δύο σφαιρών, είναι μακροσκελής και αρκετά πολύπλοκη. Παραλείπεται δε γιατί εκφεύγει του σκοπού αυτής της μελέτης. Αναλυτική παρουσίαση της απόδειξης βρίσκεται στην διεθνή βιβλιογραφία, για παράδειγμα (Timoshenko & Goodier, 1951), (Landau & Lifshitz, 1970).



$$U(\zeta) = \int F(\zeta) d\zeta \Rightarrow U(\zeta) = \frac{8}{15} D \zeta^{5/2} \quad (36).$$

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε θεωρητικά την μέγιστη παραμόρφωση  $\zeta_{\max}$  κατά μήκος της διακέντρου των δύο σφαιρών, ανάγοντας την έκφραση (35) για την δυναμική ενέργεια στην εξίσωση (29), και επιλύοντας ως προς την μεταβλητή  $\zeta = \zeta_{\max}$ , η προκύπτει ίση με

$$\zeta_{\max} = \left( \frac{15A}{8BD} \right)^{2/5} \Rightarrow \zeta_{\max} = \frac{15^{2/5}}{4} \left[ (\lambda + 1) \frac{M}{D} (u_1 - u_2)^2 \right]^{2/5} \quad (37).$$

Παρατηρείστε ότι η μέγιστη διαμήκης παραμόρφωση κάθε σφαίρας αυξάνει, όσο μεγαλύτερη είναι η σχετική ταχύτητα των δύο σφαιρών στην αρχή της αλληλεπίδρασής τους.

Τέλος μία εκτίμηση για τον χρόνο αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών μπορεί να δοθεί επιλύοντας αριθμητικά το ολοκλήρωμα (31). Συγκεκριμένα, ανάγοντας την έκφραση (36) για την δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών στην υπό ολοκλήρωση ποσότητα, προκύπτει ότι

$$\tau = \frac{2}{\sqrt{A}} \int_0^{\zeta_{\max}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - \left( \frac{8BD}{15A} \right) \zeta^{5/2}}} \Rightarrow \tau = \frac{2}{\sqrt{A}} \int_0^{\zeta_{\max}} \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - (\zeta/\zeta_{\max})^{5/2}}} \quad (38).$$

Στην συνέχεια και κατά σειρά υιοθετούμε την αλλαγή μεταβλητής,

$$q = \frac{\zeta}{\zeta_{\max}} \Rightarrow dq = \frac{d\zeta}{\zeta_{\max}} \quad (39),$$

και παρατηρούμε μέσω του αποτελέσματος (37) ότι το άνω άκρο ολοκλήρωσης ισούται με την μονάδα. Τώρα το ορισμένο ολοκλήρωμα του χρόνου αλληλεπίδρασης (38) λαμβάνει την μορφή,

$$\tau = \frac{\zeta_{\max}}{\sqrt{A}} \int_0^1 \frac{2dq}{\sqrt{1 - q^{5/2}}} \quad (40), \quad \text{όπου} \quad I = \int_0^1 \frac{2dq}{\sqrt{1 - q^{5/2}}} \quad (41).$$

Το ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης ως προς την αδιάστατη μεταβλητή  $q$  υπολογίζεται αριθμητικά και ισούται με  $I \approx 2.94$ . Στην συνέχεια η αναγωγή των σταθερών  $\zeta_{\max}$ ,  $A$  και  $D$  στο αποτέλεσμα (40), μέσω των σχέσεων (28α), (37) και (35) αντίστοιχα, δίνει τον χρόνο αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών στην μορφή

$$\tau \approx 4.34 \left[ (1 + \lambda) \frac{M(1 - \sigma^2)}{\varepsilon \sqrt{R}} \right]^{2/5} (u_1 - u_2)^{-1/5} \quad (42).$$

Το ενδιαφέρον είναι ότι ο χρόνος αλληλεπίδρασης προκύπτει αντιστρόφως ανάλογος της ποσότητας  $(u_1 - u_2)^{1/5}$ , οπότε ελαττώνεται με την αύξηση της σχετικής ταχύτητας των δύο σφαιρών στην αρχή της επαφής τους.

## V. Συνθήκη μη ολίσθησης

Για να εξασφαλιστεί ότι οι δύο σφαίρες δεν ολισθαίνουν κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασής τους, πρέπει το μέτρο της στατικής τριβής που αναπτύσσεται ανάμεσα στα στερεά και το οριζόντιο επίπεδο να μην υπερβαίνει μία οριακή τιμή, την οποία θα προσεγγίσουμε με το μέτρο της τριβής ολίσθησης. Συνεπώς πρέπει σε κάθε χρονική στιγμή να ικανοποιείται η ανισότητα,  $|T_{1,2}(t)| < |T_{o\lambda}|$ , η οποία μέσω της γνωστής, για την συγκεκριμένη περίπτωση, σχέσης  $|T_{o\lambda}| = \mu m_{1,2}g$  και του αποτελέσματος (14) λαμβάνει την μορφή

$$\mu > \frac{\lambda}{\lambda + 1} \frac{F(t)}{m_{1,2}g} \quad (43).$$

Η τελευταία ανισότητα πρέπει να εξασφαλίζεται σε κάθε χρονική στιγμή κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασής των δύο στερεών, οπότε αρκεί να εξασφαλιστεί ότι ισχύει στην μέγιστη παραμόρφωση  $\zeta_{\max}$ , την χρονική στιγμή  $\tau/2$ . Συνεπώς η προηγούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την,

$$\mu > \frac{\lambda}{\lambda + 1} \frac{F(\zeta_{\max})}{m_{1,2}g} \Rightarrow \mu > \frac{5^{3/5}}{2 \cdot 3^{2/5}} \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^{2/5}} \left( \frac{\sqrt{RE}}{1 - \sigma^2} \right)^{2/5} \frac{[M(u_1 - u_2)^2]^{3/5}}{m_{1,2}g} \quad (44).$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι ο οριακός συντελεστής τριβής ολίσθησης εξαρτάται από την σχετική μεταφορική ταχύτητα των δύο σφαιρών, συγκεκριμένα εξαρτάται γραμμικά από την ποσότητα  $(u_1 - u_2)^{6/5}$ . Αυτήν η παρατήρηση, σε συνδυασμό με το ότι ο συντελεστής τριβής εξαρτάται και από το μέτρο ελαστικότητας του Young κάθε σφαίρας, συγκεκριμένα εξαρτάται γραμμικά από την ποσότητα  $\varepsilon^{2/5}$ , οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για στερεές σφαίρες με μεγάλα μέτρα ελαστικότητας (για παράδειγμα ο χαλκός έχει μέτρο ελαστικότητας της τάξεως των  $\varepsilon \approx 68\text{GPa}$ , ενώ το ατσάλι της τάξεως των  $\varepsilon > 200\text{GPa}$ )<sup>5</sup>, ακόμη και για μικρές ταχύτητες της τάξεως των μερικών δεκάδων cm/sec, οι οριακοί συντελεστές τριβής λαμβάνουν αφύσικα μεγάλες τιμές, της τάξεως των μερικών δεκάδων μονάδων!

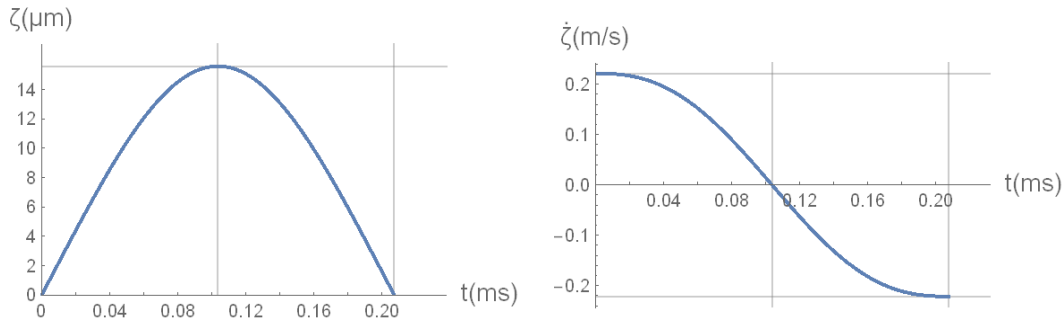
Είναι ξεκάθαρο πως σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο, κατά την κρούση δύο κυλιόμενων και απολύτως ελαστικών, ομογενών στερεών σφαιρών με ίσες ακτίνες, πολύ γρήγορα (σχεδόν ακαριαία) οι σφαίρες αρχίζουν να ολισθαίνουν στο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο κινούνται. Έπεται ότι το μοντέλο των δύο κυλιόμενων σφαιρών πρακτικά αποτυγχάνει να περιγράψει σωστά το φαινόμενο της αλληλεπίδρασής τους σε μια κεντρική ελαστική κρούση, εκτός από ένα εξαιρετικά σύντομο, όπως θα δείξουμε στην συνέχεια, χρονικό διάστημα στην αρχή του φαινομένου.

## VI. Αριθμητικές λύσεις

### α) Ένα παράδειγμα με κύλιση

Ως μία εφαρμογή των παραπάνω, ας υποθέσουμε ότι συγκρούονται κεντρικά δύο ομογενείς σφαίρες από ατσάλι με ίσες μάζες  $m_{1,2} = 512\text{gr}$ , ίσες ακτίνες  $R = 2.5\text{cm}$ , μέτρο ελαστικότητας  $\varepsilon \approx 200\text{GPa}$ , λόγο Poisson  $\sigma = 0.28$ , σταθερά  $\lambda = 0.4$  για την ροπή αδράνειας στον κύριο άξονα αδρανείας κάθε σφαίρας και αρχικές ταχύτητες  $u_1 = 0.44\text{ m/s}$  και  $u_2 = 0$ . Οι παραπάνω τιμές επιλέχθηκαν ώστε να ακολουθούν τις πειραματικές προσομοιώσεις των (Hermann & Seitz, 1982).

<sup>5</sup> [https://en.Wikipedia.org/wiki/Young%27s\\_modulus](https://en.Wikipedia.org/wiki/Young%27s_modulus)



**Σχήμα 2**

Γραφική παράσταση της αριθμητικής λύσης της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (11) και του ρυθμού μεταβολή της.

Στην περίπτωση αυτήν, οι αριθμητικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (11) απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 2. Η μέγιστη παραμόρφωση στον άξονα της μεταφορικής ταχύτητας κάθε σφαίρας εκτιμάται σε  $z_{\max} \approx 15.6 \mu\text{m}$  μέσω του αποτελέσματος (37) και ο χρόνος αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών ίσος με  $\tau \approx 0.21 \text{ms}$  μέσω της αριθμητικής επίλυσης του ολοκληρώματος (42). Και τα δύο αποτελέσματα συμφωνούν απόλυτα με το διάγραμμα της μεταβολής της παραμόρφωσης με τον χρόνο του σχήματος 2.

Δυστυχώς όμως οι αριθμητικές αυτές λύσεις δεν ισχύουν, γιατί όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, πολύ γρήγορα οι δύο σφαίρες ξεκινούν να ολισθαίνουν. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι ο απαιτούμενος συντελεστής οριακής τριβής για να μην παρατηρηθεί ολίσθηση, όπως προκύπτει μέσω της ανισότητας (44), θα ήταν ένας με την «αφύσικη» τιμή  $\mu > 160$  !!!

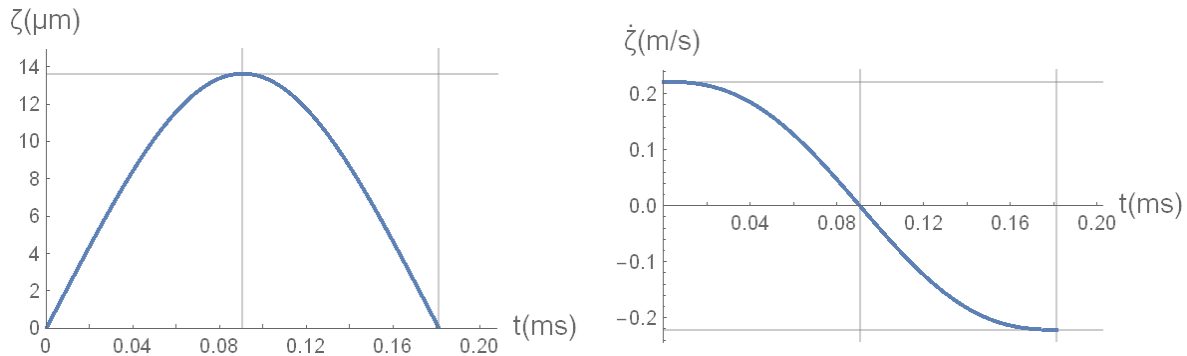
Παρ' όλα αυτά θα ήταν χρήσιμη η εκτίμηση του συγκεκριμένου μοντέλου για το πόσο γρήγορα σταματά η κύλιση, η οποία μπορεί να δοθεί αν εξισώσουμε το μέτρο της στατικής τριβής  $T_{\sigma\tau}(z)$  του αποτελέσματος (14), με το μέτρο της τριβής ολίσθησης κάθε σφαίρας με το οριζόντιο επίπεδο,  $T_{\text{ολ}} = \mu m_{1,2}g$  (υποθέτουμε συντελεστή τριβής ολίσθησης  $\mu = 1$ , συνήθης τιμή μεταξύ στερεών επιφανειών). Τότε η εξίσωση που προκύπτει ως προς τον χρόνο, ήτοι  $T_{\sigma\tau}[z(t)] = \mu m_{1,2}g$ , έχει ως αριθμητική λύση την χρονική τιμή  $t = t_0 \approx 2\mu\text{s}$ . Παρατηρείστε ότι ο χρόνος αυτός αποτελεί ένα πολύ μικρό κλάσμα του συνολικού χρόνου επαφής που προβλέπει το μοντέλο, αν η κύλιση δεν καταστρεφόταν, συγκεκριμένα ισούται με  $t_0 \approx 0.01\tau$ .

Είναι προφανές ότι στο πολύ μικρό αυτό χρονικό διάστημα, η μεταφορική και γωνιακή ταχύτητα κάθε σφαίρας δεν προλαβαίνει να αλλάξει σημαντικά. Συνεπώς βάσει αυτού του μοντέλου, μπορούμε να υποθέσουμε με ασφάλεια ότι όταν ξεκινά η ολίσθηση, οι ταχύτητες των δύο σφαιρών είναι πρακτικά αυτές στην αρχή της κρούσης.

## β) Ένα παράδειγμα χωρίς κύλιση

Εφ' όσον το μοντέλο της κύλισης αποτυγχάνει να περιγράψει σωστά την κρούση των δύο σωμάτων, θα εξετάσουμε στην συνέχεια την περίπτωση όπου οι δύο σφαίρες μόνον μεταφέρονται, χωρίς να περιστρέφονται (για παράδειγμα πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο). Τότε σύμφωνα με την ανάλυση των προηγούμενων παραγράφων αρκεί να θέσουμε την σταθερά  $\lambda$  στην κύρια ροπή αδράνειας κάθε σφαίρας ίση με το μηδέν,  $\lambda = 0$ , για να περιγράψουμε την καθαρά μεταφορική κίνηση κάθε στερεού. Τα τεχνικά χαρακτηριστικά των δύο σφαιρών και οι αρχικές συνθήκες παραμένουν οι ίδιες με αυτές της προηγούμενης παραγράφου.

Στην περίπτωση αυτήν η αριθμητική λύση της διαφορικής εξίσωσης (11) για την συνάρτηση της παραμόρφωσης  $z(t)$  κάθε σφαίρας στον άξονα της μεταφορικής της ταχύτητας, καθώς και ο ρυθμός μεταβολής της  $\dot{z}(t)$ , απεικονίζονται γραφικά στο σχήμα 3. Παρατηρούμε ότι το μοντέλο προβλέπει τώρα



**Σχήμα 3**

Χρονική μεταβολή της παραμόρφωσης στον άξονα της κίνησης, και του ρυθμού μεταβολής της, για κάθε σφαίρα.

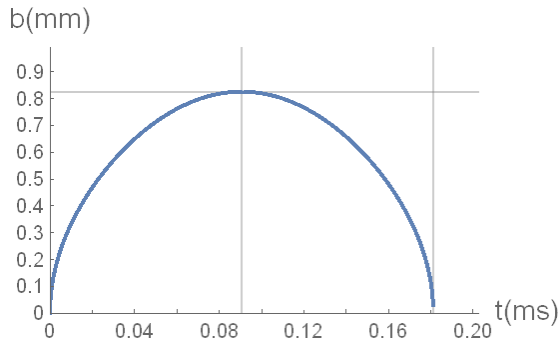
χρόνο επαφής των δύο σφαιρών της τάξεως των  $\tau \approx 0.18\text{ms}$ , και μέγιστη παραμόρφωση στον άξονα της μεταφορικής ταχύτητας κάθε σφαίρας, ίση με  $z_{\max} \approx 13.6\mu\text{m}$ . Ο ρυθμός μεταβολής της παραμόρφωσης προκύπτει μέγιστος σε μηδενική παραμόρφωση και αντίστροφα, οπότε η μονοτονία της χρονικής συνάρτησης της παραμόρφωσης προσομοιάζει με την μονοτονία του ημιτόνου.

Στο σχήμα 4 απεικονίζεται η χρονική μεταβολή της ακτίνας της επιφάνειας επαφής των δύο σφαιρών κατά την διάρκεια της κρούσης, όπως αυτή προκύπτει μέσω της προσεγγιστικής σχέσης  $b(\zeta) = \sqrt{R^2 - (R - \zeta)^2}$  (δες σχήμα 1) και της αριθμητικής λύσης του γραφήματος 3 για την διαμήκη παραμόρφωση κάθε σώματος. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη ακτίνα της επιφάνειας επαφής προκύπτει την χρονική στιγμή  $\tau/2$  και είναι περίπου ίση με  $b_{\max} \approx 0.82\text{mm}$ .

Στο σχήμα 5 απεικονίζεται η χρονική μεταβολή της δύναμης λόγω της ελαστικής παραμόρφωσης κάθε σφαίρας, μέσω του αποτελέσματος (34) και της αριθμητικής λύσης του σχήματος 3 για την διαμήκη παραμόρφωση κάθε σώματος. Το μέτρο της μέγιστης δύναμης παραμόρφωσης διαμορφώνεται στα  $2.3\text{kNt}$ , όταν η παραμόρφωση κάθε σφαίρας μεγιστοποιείται, και πάλι την χρονική στιγμή  $\tau/2$ .

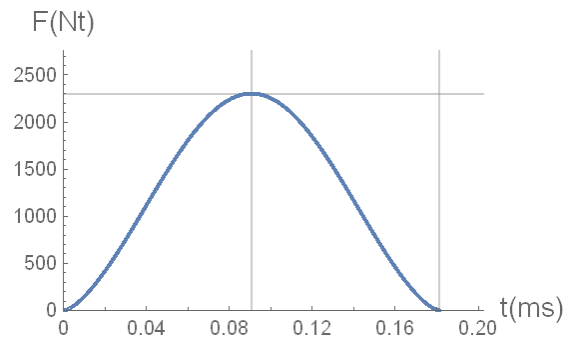
Στο σχήμα 6 απεικονίζονται τα διαγράμματα της μεταβολής της ταχύτητας κάθε σφαίρας με τον χρόνο, κατά την διάρκεια της κρούσης. Στο κοινό γράφημα για τις ταχύτητες αποτυπώνεται το γνωστό αποτέλεσμα, του ότι όταν τα δύο στερεά μόνον μεταφέρονται και έχουν ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες κατά την κεντρική τους ελαστική κρούση.

Τέλος στο σχήμα 7 απεικονίζεται γραφικά η χρονική μεταβολή της δυναμικής ενέργειας λόγω παραμόρφωσης, της κινητικής ενέργειας και της σταθερής μηχανικής ενέργειας του συστήματος των δύο σφαιρών, κατά την ελαστική τους αλληλεπίδραση. Παρατηρούμε ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος γίνονται ίσες την χρονική στιγμή  $\tau/2$  της μέγιστης παραμόρφωσης των δύο στερεών. Τονίζεται ότι η μπλε γραμμή του διαγράμματος αναλογεί στην σταθερή μηχανική ενέργεια του συστήματος, όπως προκύπτει από την αναγωγή των αριθμητικών λύσεων των γραφικών παραστάσεων του σχήματος 3, στην αναλυτική έκφραση (25).



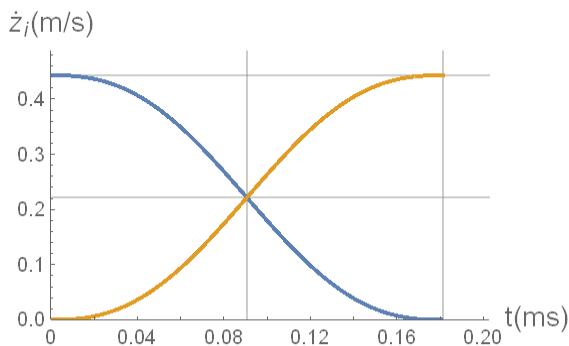
**Σχήμα 4**

Χρονική μεταβολή της ακτίνας της κυκλικής επιφάνειας επαφής των δύο σφαιρών κατά την αλληλεπίδρασή τους.



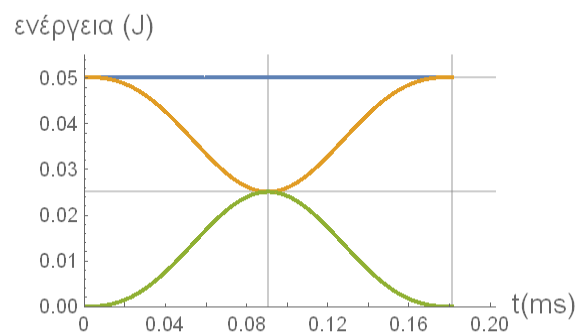
**Σχήμα 5**

Χρονική μεταβολή της δύναμης λόγω της ελαστικής παραμόρφωσης κάθε σφαίρας κατά την αλληλεπίδρασή τους.



**Σχήμα 6**

Χρονική μεταβολή της ταχύτητας κάθε σφαίρας κατά την αλληλεπίδρασή τους. Τα δύο στερεά με ίσες μάζες, ανταλλάσσουν ταχύτητες συγκρούονται κεντρικά και μόνον μεταφορικά (δεν περιστρέφονται).



**Σχήμα 7**

Χρονική μεταβολή της δυναμικής (πράσινη γραμμή), της κινητικής (πορτοκαλί γραμμή) και της ολικής ενέργειας (μπλε γραμμή) του συστήματος των δύο σφαιρών κατά την αλληλεπίδρασή τους.

Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα για τον χρόνο αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σφαιρών ή χρόνου «κρούσης», επιβεβαιώνονται και από τις προσομοιώσεις των Hermann και Seitz<sup>6</sup>, (Hermann & Seitz, 1982) όπου αναφέρεται χρόνος αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο ατσάλινων σφαιρών με τα παραπάνω χαρακτηριστικά, ίσος με 0.171ms.

## VII. Κεντρική κρούση με ολίσθηση των δύο σφαιρών

### α) Διαφορική εξίσωση της παραμόρφωσης και εξισώσεις κίνησης

Το αποτέλεσμα το οποίο πρέπει να κρατήσουμε από την προηγούμενη ανάλυση είναι το ότι κατά την ελαστική κρούση δύο κυλιόμενων σφαιρών, στην συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων, οι δύο σφαίρες αρχίζουν να ολισθαίνουν πρακτικά με την έναρξη της αλληλεπίδρασής τους (αναφερόμαστε στην περίπτωση ελαστικών στερεών σωμάτων με μέτρα ελαστικότητας της τάξεως των δεκάδων GPa).

<sup>6</sup> Οι Hermann και Seitz ασχολούνται με την κρούση δύο ομοίων ομογενών ατσάλινων σφαιρών, μάζας  $m = 512\text{gr}$ , από τις οποίες η μεν πρώτη είναι ακίνητη, η δε δεύτερη συγκρούεται κεντρικά πέφτοντας από ύψος  $h = 1\text{cm}$ , άρα με ταχύτητα  $\sqrt{2gh} \approx 0.44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Η πυκνότητα του ατσαλιού ισούται με  $\rho = 7.85 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}$ , οπότε η ακτίνα κάθε σφαίρας προκύπτει ίση με  $\sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \approx 25\text{mm}$ .

Συνεπώς έχει ένα κάποιο ενδιαφέρον να εξετάσουμε το συγκεκριμένο μοντέλο στην περίπτωση της ολίσθησης κατά την διάρκεια της κρούσης.

Έστω λοιπόν ότι οι δύο σφαίρες συγκρούονται κεντρικά με αρχικές μεταφορικές ταχύτητες  $\vec{u}_1 = u_1 \hat{z}$ ,  $\vec{u}_2 = u_2 \hat{z}$  και γωνιακές ταχύτητες  $\vec{\omega}_1 = -(u_1/R)\hat{y}$ ,  $\vec{\omega}_2 = -(u_2/R)\hat{y}$  (πριν την κρούση υποθέτουμε κύλιση κάθε στερεού στην οριζόντια επιφάνεια). Με την έναρξη της αλληλεπίδρασής τους οι δύο σφαίρες αρχίζουν να ολισθαίνουν, οπότε η όλη κατάσταση απεικονίζεται και πάλι στο σχήμα 1, με την διαφορά ότι τώρα οι δυνάμεις  $\vec{T}_{1,2}$  είναι τριβές ολίσθησης, με μέτρα τα οποία στην συγκεκριμένη περίπτωση δίνονται από την σχέση

$$T_{1,2} = \mu N_{1,2} = \mu m_{1,2} g \quad (45),$$

όπου  $\mu$  ο κοινός για τις δύο σφαίρες συντελεστής τριβής ολίσθησης με την οριζόντια επιφάνεια.

Τώρα οι νόμοι του Νεύτωνα για την μεταφορά και την περιστροφή κάθε σφαίρας είναι ανεξάρτητοι, εφ' όσον οι δεσμοί (4α,β,γ,δ) δεν υφίστανται πλέον. Για την μεν σφαίρα «1» λαμβάνουν την μορφή,

$$\mu m_1 g - F = m_1 \ddot{z}_1 \Rightarrow \ddot{z}_1 = \mu g - \frac{F}{m_1} \quad (46\alpha), \quad \mu m_1 g R = -\lambda m_1 R^2 \ddot{\theta}_1 \Rightarrow \ddot{\theta}_1 = -\frac{\mu g}{\lambda R} = \text{σταθ} \quad (46\beta)$$

και για την δε σφαίρα «2», αντίστοιχα την μορφή,

$$F - \mu m_2 g = m_2 \ddot{z}_2 \Rightarrow \ddot{z}_2 = -\mu g + \frac{F}{m_2} \quad (47\alpha), \quad -\mu m_2 g R = -\lambda m_2 R^2 \ddot{\theta}_2 \Rightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{\mu g}{\lambda R} = \text{σταθ} \quad (47\beta).$$

Συμπεραίνουμε ότι τα δύο στερεά εκτελούν περιστροφικά ομαλά μεταβαλλόμενες κινήσεις με τις σταθερές γωνιακές επιταχύνσεις (46β) και (47β), οπότε η γωνιακή τους ταχύτητα μεταβάλλεται χρονικά γραμμικά, σύμφωνα με τις συναρτήσεις

$$\dot{\theta}_1(t) = -\frac{\mu g}{\lambda R} t + \frac{u_1}{R} \quad (48), \quad \dot{\theta}_2(t) = \frac{\mu g}{\lambda R} t + \frac{u_2}{R} \quad (49).$$

Επίσης οι μεταφορικές επιταχύνσεις κάθε σφαίρας κατά την διάρκεια της κρούσης τους, υπακούουν στην συνθήκη (5γ), ήτοι

$$-2\mu g + \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) F = -2\ddot{\zeta} \Rightarrow \ddot{\zeta}(t) + \frac{1}{2M} F[\zeta(t)] = \mu g \quad (50),$$

όπου η συνάρτηση  $F(\zeta)$  δίνεται από την σχέση (34).

Η παραμόρφωση κάθε σφαίρας στον άξονα των μεταφορικών τους ταχυτήτων υπακούει τώρα την μη ομογενή διαφορική εξίσωση (50) (έναντι της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (11) στην περίπτωση της καθαρά μεταφορικής κίνησης), με αρχικές συνθήκες και πάλι τις (13α,β), όπου  $M$  η ανηγμένη μάζα του συστήματος. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (50) είναι ανεξάρτητη από την παράμετρο  $\lambda$  της κύριας ροπής αδράνειας κάθε σφαίρας, όπως και στην περίπτωση της καθαρά μεταφορικής κίνησης των δύο σφαιρών (δες παράγραφο VIβ).

Η χρονική εξάρτηση των μεταφορικών ταχυτήτων των δύο σφαιρών δίνεται τώρα ολοκληρώνοντας τα αποτελέσματα (46α) και (47α), συγκεκριμένα

$$\dot{z}_1(t) - u_1 = \int_0^t \dot{z}_1(t) dt = \mu g t - \int_0^t \frac{F(t)}{m_1} dt \quad (51\alpha), \quad \dot{z}_2(t) - u_2 = \int_0^t \dot{z}_2(t) dt = -\mu g t + \int_0^t \frac{F(t)}{m_2} dt \quad (51\beta).$$

Τώρα η μεταβολή της ορμής του συστήματος των δύο σφαιρών σε μία τυχαία χρονική στιγμή ισούται με

$$\Delta \vec{p}(t) = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = [m_1(\dot{z}_1(t) - u_1) + m_2(\dot{z}_2(t) - u_2)]\hat{z} \Rightarrow \Delta \vec{p}(t) = \mu(m_1 - m_2)gt\hat{z} \quad (52)^7.$$

Αναλόγως υπολογίζεται η μεταβολή της στροφορμής του συστήματος των δύο σφαιρών, ως προς ένα σημείο του άξονα της διακέντρου,

$$\Delta \vec{L}_s(t) = \int_0^t \sum \vec{\tau}_s dt = \mu(m_1 - m_2)gRt\hat{y} \Rightarrow \Delta \vec{L}_s(t) = p(t)R\hat{y} \quad (53).$$

Είναι προφανές ότι στην ειδική περίπτωση όπου οι μάζες των δύο σφαιρών είναι μεταξύ τους ίσες, η ορμή του συστήματος παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια της κρούσης των δύο σωμάτων. Στην δε περίπτωση όπου οι μάζες των δύο στερεών διαφέρουν, η ορμή δεν διατηρείται, αλλά εξαρτάται γραμμικά από τον χρόνο στον οποίο την υπολογίζουμε.

## β) Ένα παράδειγμα με ολίσθηση

Ως μία εφαρμογή των παραπάνω θα μελετήσουμε την κρούση των δύο σφαιρών της παραγράφου VIβ, επιλύοντας αριθμητικά την διαφορική εξίσωση (50), όπου η συνάρτηση  $F(t)$  για την δύναμη παραμόρφωσης θα προσεγγιστεί και πάλι από το αποτέλεσμα (34) για τις δυνάμεις Hertz. Αν τώρα υποθέσουμε ότι ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σφαιρών και του οριζοντίου επιπέδου ισούται με την, συνήθη μεταξύ στερεών τιμή,  $\mu = 1$ , οι αριθμητικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (50) απεικονίζονται στο σχήμα 8, για τις ίδιες αρχικές συνθήκες και το ίδιο φυσικό σύστημα όπως και στην παράγραφο VIβ.

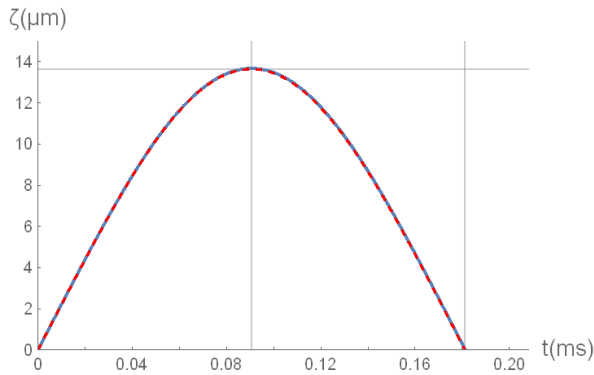
Αρχικά παρατηρούμε ότι ο χρόνος αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών προκύπτει και πάλι ίσος με  $\tau \approx 0.18\text{ms}$  και η μέγιστη διαμήκης παραμόρφωση κάθε σφαίρας ίση με  $z_{\max} \approx 13.6\mu\text{m}$ , σε εκπληκτική συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της καθαρά μεταφορικής περίπτωσης της παραγράφου VIβ. Κατ' ουσίαν οι καμπύλες στα σχήματα 3 και 8, πρακτικά συμπίπτουν (δες σχήμα 8). Το γεγονός αυτό δεν εκπλήσσει, αν συγκριθούν οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την χρονική εξέλιξη της παραμόρφωσης κάθε σφαίρας, η ομογενής (11) για το μοντέλο όπου η τριβή δεν λαμβάνεται υπ' όψιν (όπου  $\lambda = 0$ ) και η μη ομογενής (50) για το μοντέλο με την τριβή ολίσθησης. Παρατηρούμε ότι οι δύο εξισώσεις διαφέρουν μόνον ως προς τον σταθερό όρο  $\mu g$ , ο οποίος διαφοροποιεί τις λύσεις κάθε εξίσωσης, προσθέτοντας στην ομογενή και την αντίστοιχη, του όρου  $\mu g$ , μερική λύση. Συγκεκριμένα η μη ομογενής εξίσωση (50), με την αναγωγή της δύναμης (34), και της σταθεράς (35) λαμβάνει την μορφή

$$\ddot{\zeta}(t) + \frac{2}{3} \frac{D}{M} \zeta(t)^{3/2} = \mu g \quad (54),$$

όπου η σταθερή ποσότητα στον δεύτερο όρο του πρώτου μέλος ισούται με  $\frac{2}{3} \frac{D}{M} \approx 8.93 \cdot 10^{10} \text{m}^{-1/2} \text{s}^{-2}$ , έναντι του σταθερού όρου στο δεύτερο μέλος,  $\mu g \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Γίνεται τώρα προφανές ότι η διαφορά των

<sup>7</sup> Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και απ' ευθείας μέσω της ώθησης του συστήματος,

$$\Delta \vec{p}(t) = \int_0^t \sum \vec{F} dt = \int_0^t (T_1 - T_2) dt = \mu(m_1 - m_2)gt\hat{y}$$



**Σχήμα 8**

Γραφικές παραστάσεις της χρονικής μεταβολής της παραμόρφωσης κάθε σφαίρας σύμφωνα με την αριθμητική λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (44).

Στο διάγραμμα με την διακεκομμένη γραμμή απεικονίζεται η αριθμητική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (11) για το μοντέλο της παραγράφου VIβ.

λύσεων της ομογενούς και της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης για τις ίδιες αρχικές συνθήκες, είναι πρακτικά αμελητέα, εφ' όσον η μερική λύση είναι μια πολύ μικρή διόρθωση της λύσης της ομογενούς.

Είναι λογικό, βάσει των παραπάνω, να υποθέσουμε ότι οι μεταφορικές ταχύτητες (52α,β) διαφέρουν από τις αντίστοιχες λύσεις (22α,β) του «μεταφορικού» μοντέλου ( $\lambda = 0$ ) της παραγράφου VIβ, κατά τον όρο  $\mu g t$ . Αλλά στο πολύ μικρό χρονικό διάστημα  $\tau \approx 0.18 \text{ms}$  της κρούσης, ο όρος αυτός είναι σχετικά μικρός εν συγκρίσει με τους υπόλοιπους όρους. Συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε με σχετική ασφάλεια ότι η μεταφορική ταχύτητα κάθε σφαίρας ακριβώς στο πέρας της κρούσης, προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τις λύσεις της παραγράφου VIβ. Διαφορετικά εκτιμούμε ότι οι δύο σφαίρες ανταλλάσσουν, προσεγγιστικά, μεταφορικές ταχύτητες και στην περίπτωση της ολίσθησης.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας των δύο σφαιρών στο πέρας της κρούσης μέσω των αποτελεσμάτων (48) και (49). Παρατηρούμε ότι

$$\Delta\omega_1 = \omega_1(\tau) - \omega_1(0) = -\frac{\mu g}{\lambda R}\tau + \frac{u_1}{R} - \frac{u_1}{R} = -\frac{\mu g}{\lambda R}\tau \approx -0.18 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

και

$$\Delta\omega_2 = \omega_2(\tau) - \omega_2(0) = +\frac{\mu g}{\lambda R}\tau + \frac{u_2}{R} - \frac{u_2}{R} = +\frac{\mu g}{\lambda R}\tau \approx +0.18 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

αντίστοιχα. Δηλαδή αρχικά η σφαίρα «1» (η οποία κυλιέται ακριβώς πριν την κρούση) είχε γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1(0) = u_1/R \approx 17.72 \text{rad/s}$  και στο πέρας της αλληλεπίδρασής της με την σφαίρα «2» έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega_1(\tau) \approx 17.54 \text{rad/s}$ . Αναλόγως η σφαίρα «2» η οποία στην αρχή της κρούσης ήταν ακίνητη, άρα  $\omega_2(0) = 0$ , στο πέρας της κρούσης έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα  $\omega_2(\tau) \approx 0.18 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Διαπιστώνουμε ότι η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας κάθε σφαίρας είναι σχετικά μικρή (της τάξεως του 1%), άρα μπορεί, προσεγγιστικά, να αγνοηθεί.

Οι δύο αυτές προσεγγίσεις (για την μεταφορική και την γωνιακή ταχύτητα), είναι ισοδύναμες με την προσέγγιση του ότι η τριβή ολίσθησης με το οριζόντιο επίπεδο είναι αμελητέα εν συγκρίσει με τις «κρουστικές» δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω παραμόρφωσης σε κάθε σφαίρα. Για του λόγου το αληθές, η δύναμη αλληλεπίδρασης κάθε σφαίρας ισούται στην μέγιστη παραμόρφωση περίπου με  $2.3 \text{kNt}$ , ενώ η τριβή ολίσθησης ισούται με  $5.02 \text{Nt}$ . Εν κατακλείδι, όσον αφορά την μεταφορική κίνηση των δύο σφαιρών, μπορούμε ως προσέγγιση να αντλήσουμε συμπεράσματα από το «μεταφορικό» μοντέλο της παραγράφου VIβ, και όσον αφορά την περιστροφική κίνηση κάθε σφαίρας μπορούμε, επίσης ως προσέγγιση, να υποθέσουμε ότι δεν μεταβάλλεται κατά την κρούση.

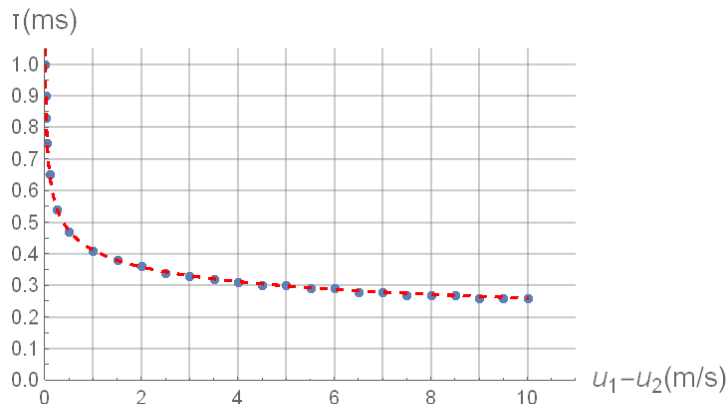


Βάσει των παραπάνω για τις ταχύτητες κάθε σφαίρας μετά την κρούση, προκύπτει ότι

$$v_1(\tau) \approx 0, \quad v_2(\tau) \approx u_1, \quad \omega_1(\tau) \approx \frac{u_1}{R}, \quad \omega_2(\tau) \approx 0.$$

Αν λάβουμε ως δεδομένο την διατήρηση της ορμής του συστήματος (πολύ λογική υπόθεση αν αναλογιστούμε ότι ο χρόνος αλληλεπίδρασης προκύπτει κλάσμα του ms), τότε σε συνδυασμό με την διατήρηση της ενέργειας (οι «ενοχλητικές» τριβές ολίσθησης θεωρούνται αμελητέες σε αυτήν την προσέγγιση), τα παραπάνω αποτελέσματα απορρέουν και απ' ευθείας από αυτές τις δύο αρχές διατήρησης.

### γ) Ένα παράδειγμα από το μπιλιάρδο



**Σχήμα 9**

Γραφική απεικόνιση της εξάρτησης του χρόνου  $\tau$  της ελαστικής αλληλεπίδρασης των δύο μπαλών του μπιλιάρδου, από την σχετική τους ταχύτητα  $u_1 - u_2$  στην αρχή του φαινομένου. Οι μπλε κουκκίδες αναλογούν στις τιμές του χρόνου αλληλεπίδρασης, όπως υπολογίζονται μέσω των αριθμητικών λύσεων της διαφορικής εξίσωσης (50) για την παραμόρφωση, σε διάφορες τιμές της αρχικής σχετικής ταχύτητας των δύο σφαιρών. Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή απεικονίζει το γράφημα του αποτελέσματος (42) για τον χρόνο αλληλεπίδρασης συναρτήσει της αρχικής σχετικής ταχύτητας.

Ένα τελευταίο παράδειγμα θα αντλήσουμε από το γνωστό παιχνίδι του μπιλιάρδου. Συγκεκριμένα θεωρούμε δύο όμοιες μπάλες του μπιλιάρδου μάζας  $m_{1,2} = 282\text{gr}$ , ίσες ακτίνες  $R = 68\text{mm}$ , μέτρο ελαστικότητας  $E \approx 5.48\text{GPa}$  και λόγο Poisson  $\sigma = 0.34$ . Η μία μπάλα είναι ακίνητη και η δεύτερη προσπίπτει κεντρικά σε αυτήν με ταχύτητα μέτρου  $7\text{ m/s}$ , άρα οι αρχικές συνθήκες της κρούσης είναι  $u_1 = 7\text{ m/s}$  και  $u_2 = 0$ <sup>8</sup>.

Στην περίπτωση αυτή ο χρόνος αλληλεπίδρασης των δύο μπαλών μέσω του παραπάνω μοντέλου προκύπτει ίσος με  $\tau \approx 0.28\text{ms}$  και η μέγιστη παραμόρφωση κάθε μπάλας ίση με  $\zeta_{\max} \approx 0.33\text{mm}$ .

Τα πειραματικά αποτελέσματα που αναφέρονται στην ιστοσελίδα της υποσημείωσης 8 (στο τέλος αυτής της σελίδας), είναι  $0.25\text{--}0.30\text{ms}$  για τον χρόνο επαφής και  $0.3\text{--}0.35\text{mm}$  για την μέγιστη παραμόρφωση.

Τέλος στο σχήμα 9 απεικονίζεται η εξάρτηση του χρόνου  $\tau$  της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σφαιρών, με την σχετική ταχύτητα  $u_1 - u_2$  στην έναρξη της κρούσης τους, όπως προκύπτει από την σχέση (42).

<sup>8</sup> Οι παραπάνω τιμές επιλέχθηκαν ώστε να αντιπαρατεθούν με τις πειραματικές μετρήσεις της ιστοσελίδας <http://dbkcues.ru/articles-2/collision-of-billiard-balls/?lang=en>

## VIII. Σχόλια

Σύμφωνα με το μοντέλο των δυνάμεων Hertz, σε μία κεντρική ελαστική κρούση δύο αρχικά κυλιόμενων στερεών σφαιρών, πάνω σε οριζόντιο επίπεδο:

- [1] Οι δύο σφαίρες σταματούν την κύλιση και αρχίζουν να ολισθαίνουν, πρακτικά με την έναρξη της αλληλεπίδρασής τους. Συγκεκριμένα το χρονικό διάστημα της κύλισης, στην αρχή της αλληλεπίδρασης, εξαρτάται από την αρχική σχετική μεταφορική ταχύτητα των δύο σφαιρών, το μέτρο ελαστικότητάς τους και τον οριακό συντελεστή τριβής μεταξύ κάθε σφαίρας και του οριζοντίου επιπέδου. Τα στερεά έχουν πολύ μεγάλα μέτρα ελαστικότητας (της τάξεως των GPa), γεγονός που οδηγεί σε εξαιρετικά μικρά χρονικά διαστήματα κύλισης, ακόμη και για πολύ μικρές σχετικές ταχύτητες.
- [2] Ο χρόνος αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών ελαττώνεται, όσο αυξάνει η σχετική ταχύτητα των δύο στερεών στην αρχή της «κρούσης». Για ταχύτητες της τάξεως των  $\text{m/s}$ , προκύπτει της τάξεως του δεκάτου του ms (δες για παράδειγμα το διάγραμμα στο σχήμα 9).
- [3] Η μέγιστη συμπίεση κάθε σφαίρας εξαρτάται επίσης από την σχετική ταχύτητα των δύο στερεών στην αρχή της «κρούσης». Για ταχύτητες της τάξεως των  $\text{m/s}$ , προκύπτει της τάξεως των μερικών  $\mu\text{m}$  για «σκληρά» στερεά με πολύ μεγάλα μέτρα ελαστικότητας (όπως το ασάλι) έως δέκατα των  $\text{mm}$  για «μαλακά» υλικά με πιο μικρά μέτρα ελαστικότητας, όπως μία μπάλα του μπιλιάρδου.
- [4] Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σφαιρών προκύπτουν κατά πολύ μεγαλύτερες των δυνάμεων τριβής (τρεις τάξεις μεγέθους στα παραδείγματα παραπάνω), άρα μπορούν να αγνοηθούν με ασφάλεια. Τότε η κρούση μπορεί να προσεγγιστεί ως ακαριαία και να μελετηθεί απ' ευθείας με την διατήρησης της ορμής στην μεταφορική κίνηση και την διατήρηση της ενέργειας.

## IX. Βιβλιογραφία

Hermann, F., & Seitz, M. (1982). How does the ball-chain work? *American Journal of Physics*, Vol 50, No 11, 977-981.

Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1970). *Theory of Elasticity*. London: Pergamon Press.

Popov, V. F. (2010). *Contact Mechanics and Friction*. Berlin: Springer -Verlag.

Timoshenko, S., & Goodier, J. N. (1951). *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company.