ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΤΗΝ ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

1. ΘΕΜΑ

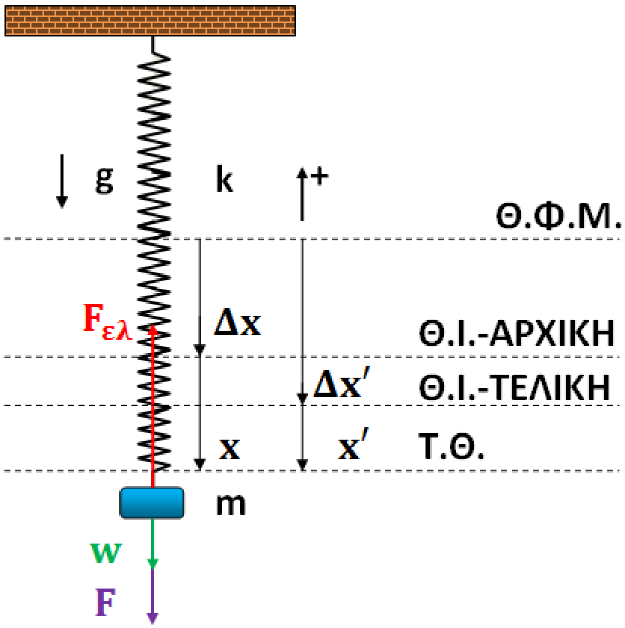
Μελέτη της μεταβολής της ενέργειας ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή λόγω της δράσης μιας σταθερής δύναμης $\vec{F}$.

2. ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΡΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗ

Ένα σώμα μάζας m ισορροπεί δεμένο στο κάτω άκρο του κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k. Η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου στη θέση αυτή είναι Δx.

Ανεβάζουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα πάνω, μέχρι το ελατήριο να αποκτήσει το φυσικό του μήκος και από τη θέση αυτή το αφήνουμε να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A = |\Delta x|$ και σταθερά επαναφοράς $D = k$.

Κάποια στιγμή, που το σώμα διέρχεται από μια τυχαία θέση με απομάκρυνση x, αρχίζει να ασκείται στο σώμα σταθερή κατακόρυφη δύναμη $\vec{F} = \mu\vec{w}$, όπου $w = mg$ το βάρος του σώματος και $\mu \neq 0$.



3. ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ

Έστω E και E'είναι οι ενέργειες ταλάντωσης του σώματος πριν και μετά την άσκηση της δύναμης $\vec{F}$ αντίστοιχα. Να βρεθεί η σχέση (λόγος) των ενεργειών αυτών.

4. Η ΛΥΣΗ

Στην αρχική θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{ελ}} + \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow -k\Delta x + mg = 0 \Leftrightarrow \Delta x = \frac{mg}{k} \ (1)$$

Στην τελική θέση ισορροπίας του σώματος ισχύει:

$$\overrightarrow{\Sigma F} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_{ελ}} + \vec{w} + \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow -k\Delta x' + mg + \mu mg = 0 \Leftrightarrow -k\Delta x' = -(1+\mu)mg \Leftrightarrow$$

$$\Delta x' = (1+\mu)\Delta x (2)$$

Επίσης από το σχήμα προκύπτει η διανυσματική σχέση:

$$\overrightarrow{\Delta x'} + \vec{x'} = \overrightarrow{\Delta x} + \vec{x} (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (3) την (2) παίρνουμε μετά από πράξεις:

$$x' = x - \mu \Delta x (4)$$

Ο λόγος $\frac{E'}{E}$ των ενεργειών της ταλάντωσης του σώματος λίγο μετά και λίγο πρίν την άσκηση της δύναμης F είναι:

$$\frac{E'}{E} = \frac{U+K}{U'+K'} \Leftrightarrow \frac{E'}{E} = \frac{\frac{1}{2}kx'^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2}{\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}m\upsilon^2} \Leftrightarrow \frac{E'}{E} = \frac{m\omega^2x'^2+m\upsilon^2}{m\omega^2x^2+m\upsilon^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{E'}{E} = \frac{\omega^2x'^2+\omega^2(A^2-x^2)}{\omega^2x^2+\omega^2(A^2-x^2)} \Leftrightarrow \frac{E'}{E} = \frac{x'^2+(A^2-x^2)}{x^2+(A^2-x^2)} \Leftrightarrow \frac{E'}{E} = \frac{x'^2-x^2+A^2}{A^2} (4)$$

Αντικαθιστώντας στην (4) την (2) και θέτοντας $\Delta x = -A$, αφού $\Delta x < 0$.
Τελικά παίρνουμε:

$$\frac{E'}{E} = \mu^2+2\mu\frac{x}{A}+1 (5)$$

με

$$-A \leq x \leq A \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{A} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{A}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{A}\right)^2 \leq 1 (6)$$

Βλέπουμε ότι ο ζητούμενος λόγος είναι τριώνυμο του μ, με παράμετρο το λόγο $\lambda = \frac{x}{A}$ και διακρίνουσα $\Delta = 4\left[\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 1\right] (7)$, που λόγω της (6) είναι $\Delta \leq 0$.

Έτσι μπορούμε να πάρουμε τις περιπτώσεις:

i. $\Delta = 0 \Leftrightarrow x = +A$ ή $x = -A$.

Για $x = +A$: $E' = E(\mu+1)^2, \mu \neq -1.$

Για $\mu = -1$, το σώμα θα ισορροπούσε στη θέση $x = +A$ της αρχικής ταλάντωσης αφού στη θέση αυτή θα ίσχυε $\upsilon = 0$ και $\Sigma F = 0$.

Για $x = -A$: $E' = E(\mu-1)^2, \mu \neq 1.$

Για $\mu = 1$, το σώμα θα ισορροπούσε στη θέση $x = -A$ της αρχικής ταλάντωσης αφού στη θέση αυτή θα ίσχυε $\upsilon = 0$ και $\Sigma F = 0$.

ii. $\Delta < 0$, τότε για κάθε τιμή του λόγου $\lambda = \frac{x}{A}$ ισχύει η (5) δηλαδή:

$$\frac{E'}{E} = \mu^2+2\lambda\mu+1$$