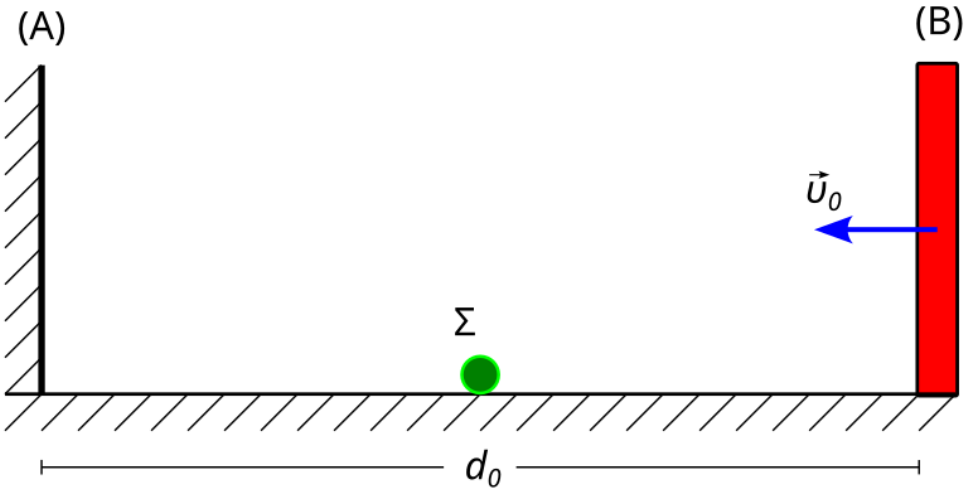
Ελαστική κρούση με κινούμενο τοίχο

Ένα σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων βρίσκεται ακίνητο πάνω σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο και μεταξύ δύο παράλληλων κατακόρυφων τοίχων. Ο τοίχος (Α) είναι ακλόνητος, ενώ ο τοίχος (Β) κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $\upsilon_0 = 2m/s$ προς το σώμα Σ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ οι δύο τοίχοι απέχουν απόσταση $d_0 = 80m$ και το σώμα Σ βρίσκεται στο μέσο αυτής της απόστασης.



Εάν όλες οι κρούσεις που θα ακολουθήσουν είναι ελαστικές,

Α. να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή της πρώτης κρούσης του τοίχου (Β) με το σώμα Σ και την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά από αυτή.

Β. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή της δεύτερης κρούσης του τοίχου (Β) με το σώμα Σ και την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά από αυτή.

Εάν αμέσως μετά τη δεύτερη κρούση του με το Σ ο τοίχος (Β) ακινητοποιείται ακαριαία (λόγω κατάλληλης εξωτερικής παρέμβασης) και παραμένει ακλόνητος στη θέση αυτή,

Γ. να αιτιολογήσετε το γεγονός ότι η κίνηση του Σ στη συνέχεια είναι περιοδική, υπολογίζοντας και την περίοδο της κίνησής του.

Όλες οι κρούσεις να θεωρηθούν ακαριαίες. Η μάζα κάθε τοίχου να θεωρηθεί πολύ μεγαλύτερη από τη μάζα του σώματος Σ.

Λύση

Α. Επειδή το σώμα Σ τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ισαπέχει από τους δύο τοίχους, συμπεραίνουμε ότι η απόστασή του από τον τοίχο (Β) θα είναι τότε ίση με $d_1 = \frac{d_0}{2} = 40m$. Καθώς ο τοίχος κινείται με σταθερή ταχύτητα και το σώμα Σ είναι ακόμη ακίνητο, η χρονική στιγμή της 1ης τους κρούσης θα είναι η:

$$\upsilon_0 = \frac{d_1}{t_1} \Longrightarrow t_1 = \frac{d_1}{\upsilon_0} = \frac{40m}{2m/s} \Longrightarrow \boxed{t_1 = 20s}$$

Έστω m_1 η μάζα του σώματος Σ και m_2 η μάζα του τοίχου (Β), με $m_2 \gg m_1$. Ισοδύναμα, θα ισχύει ότι $\frac{m_1}{m_2} \approx 0$.

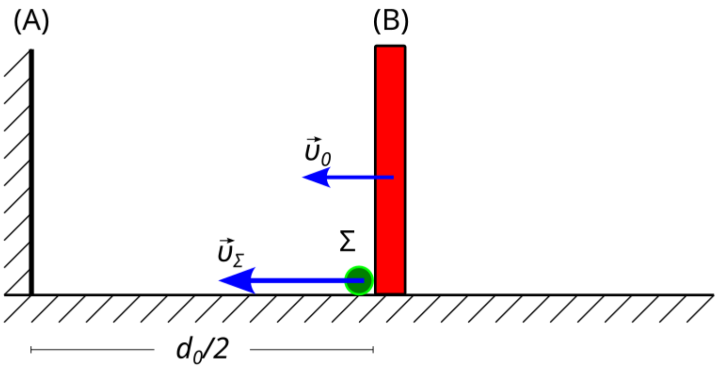
Επειδή η κρούση του τοίχου (Β) με το σώμα Σ είναι ελαστική και κάθετη, για την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά την 1η κρούση τους θα έχουμε:

$$\upsilon_\Sigma = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_0 = \frac{2}{\frac{m_1}{m_2} + 1}\upsilon_0 \approx \frac{2}{0+1}\upsilon_0 = 2\upsilon_0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\upsilon_\Sigma = +4m/s}$$

όπου θεωρήσαμε θετική φορά προς τα αριστερά.

Β. Τη χρονική στιγμή $t_1 = 20s$ λοιπόν, το σώμα Σ κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα $\upsilon_\Sigma = +4m/s$ και ο τοίχος (Β) με ταχύτητα $\upsilon_0 = +2m/s$ επίσης προς τα αριστερά, και απέχουν και οι δύο από τον τοίχο (Α) απόσταση ίση με $d_1 = \frac{d_0}{2} = 40m$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Το σώμα Σ, μέχρι να συγκρουστεί κάθετα και ελαστικά με τον τοίχο (Α), θα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση. Η (πρώτη) σύγκρουση του σώματος Σ με τον τοίχο (Α), θα πραγματοποιηθεί μετά από χρονικό διάστημα Δt_1 από τη χρονική στιγμή t_1, για το οποίο θα ισχύει ότι

$$\upsilon_\Sigma = \frac{d_1}{\Delta t_1} \Longrightarrow \Delta t_1 = \frac{d_1}{\upsilon_\Sigma} = \frac{40m}{4m/s} \Longrightarrow \Delta t_1 = 10s$$

Επομένως, το σώμα Σ θα συγκρουστεί με τον τοίχο (Α) τη χρονική στιγμή

$$t_A = t_1 + \Delta t_1 = 20s + 10s = 30s$$

Στο χρονικό διάστημα Δt_1, ο τοίχος (Β) έχει διανύσει απόσταση ίση με

$$\Delta x_B = \upsilon_0 \Delta t_1 = 2 \cdot 10m \Longrightarrow \Delta x_B = 20m$$

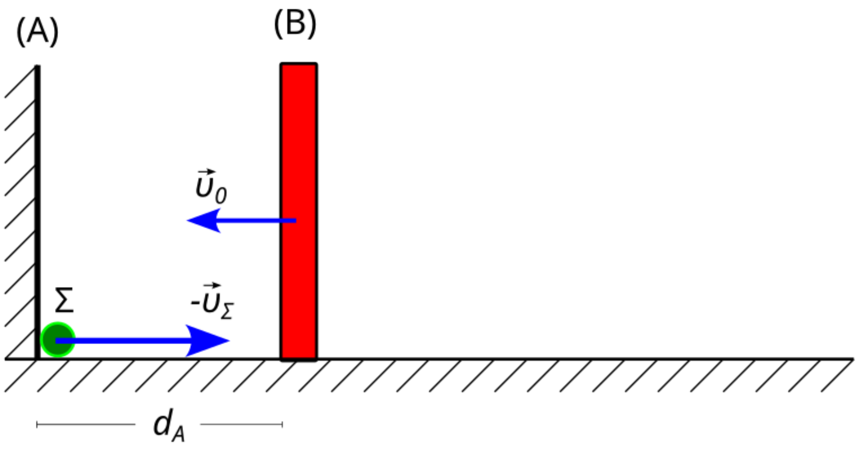
Άρα, τη χρονική στιγμή t_A ο τοίχος (Β) απέχει από τον τοίχο (Α) απόσταση ίση με

$$d_A = d_1 - \Delta x_B \Longrightarrow d_A = 20m$$

Επειδή ο Σ προσκρούει ελαστικά και κάθετα στον τοίχο (Α), συμπεραίνουμε ότι θα ανακλαστεί με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς. Δηλαδή,

$$\upsilon_{\Sigma}' = -4m/s$$

Όλα τα παραπάνω, για τη χρονική στιγμή t_A, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Έτσι, το σώμα Σ θα συγκρουστεί για 2η φορά με τον τοίχο (Β) μετά από χρονικό διάστημα Δt_2 από τη χρονική στιγμή t_A, για το οποίο θα ισχύει ότι:

$$|\upsilon_{\Sigma}'|\Delta t_2 + \upsilon_0 \Delta t_2 = d_A \Longrightarrow \Delta t_2 = \frac{d_A}{|\upsilon_{\Sigma}'| + \upsilon_0} = \frac{20}{4+2}s \Longrightarrow \Delta t_2 = \frac{10}{3}s$$

Οπότε, η 2η κρούση του Σ με τον τοίχο (Β) θα συμβεί τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_A + \Delta t_2 \Longrightarrow t_2 = 30s + \frac{10}{3}s \Longrightarrow \boxed{t_2 = \frac{100}{3}s}$$

Για την ταχύτητα του Σ αμέσως μετά από τη 2η αυτή κρούση του με τον τοίχο (Β), έχουμε:

$$\upsilon_{\Sigma,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_0 + \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_{\Sigma}' \Longrightarrow \upsilon_{\Sigma,\tau\varepsilon\lambda} = \frac{2}{\frac{m_1}{m_2}+1}\upsilon_0 + \frac{\frac{m_1}{m_2}-1}{\frac{m_1}{m_2}+1}\upsilon_{\Sigma}' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_{\Sigma,\tau\varepsilon\lambda} \approx \frac{2}{0+1}\upsilon_0 + \frac{0-1}{0+1}\upsilon_{\Sigma}' \Longrightarrow \upsilon_{\Sigma,\tau\varepsilon\lambda} = 2\cdot(+2m/s) - 1\cdot(-4m/s) \Longrightarrow$$

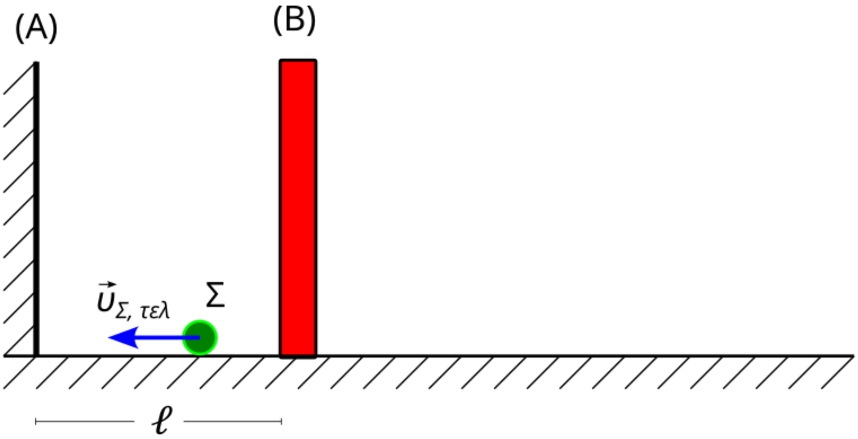
$$\Longrightarrow \boxed{\upsilon_{\Sigma,\tau\varepsilon\lambda} = +8m/s}$$

Δηλαδή, μετά τη 2η κρούση τους, το σώμα Σ κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $8m/s$.

Γ. Ο τοίχος (Β) θα παραμείνει ακίνητος στη θέση της 2ης κρούσης του με το σώμα Σ και θα απέχει από τον τοίχο (Α) απόσταση ίση με το διάστημα που διήνυσε ο Σ στο χρονικό διάστημα Δt_2. Επομένως,

$$(AB) = \ell = |\upsilon_{\Sigma}'|\Delta t_2 \Longrightarrow \ell = 4\cdot\frac{10}{3}m \Longrightarrow \ell = \frac{40}{3}m$$

Πλέον, θα έχουμε τη διάταξη του παρακάτω σχήματος όπου τόσο ο τοίχος (Α), όσο και ο τοίχος (Β) θα παραμένουν ακλόνητοι και όλες οι κρούσεις ελαστικές.



Μετά από κάθε κρούση του Σ με κάποιον από τους δύο τοίχους, το σώμα θα ανακλάται με αντίθετη ταχύτητα. Έτσι, το σώμα Σ θα περιορίσει την κίνησή του ανάμεσα στους δύο τοίχους και θα διανύει την απόσταση ℓ μεταξύ δύο διαδοχικών κρούσεων με σταθερού μέτρου ταχύτητα και σε σταθερό χρονικό διάστημα. Άρα, η κίνησή του θα εκτελέσει το σώμα Σ είναι περιοδική, με περίοδο ίση με το χρονικό διάστημα για τη μετάβαση (Β) → (Α) → (Β). Δηλαδή,

$$T = \frac{2\ell}{υ_{Σ,τελ}} \Longrightarrow T = \frac{2\cdot\frac{40}{3}}{8}s \Longrightarrow \boxed{T = \frac{10}{3}s}$$

Σχόλιο: 1) *Το ερώτημα Α θα μπορούσαμε να το αντιμετωπίσουμε και δουλεύοντας με σύστημα αναφοράς τον τοίχο (Β). Στο σύστημα αυτό, ο τοίχος (Β) είναι ακίνητος και το σώμα Σ κινείται προς αυτόν με ταχύτητα* $υ_1 = -υ_0 = -2m/s$. *Έτσι, θα είχαμε μία κάθετη και ελαστική κρούση του Σ στον ακίνητο τοίχο, με αποτέλεσμα το σώμα Σ να κινούταν με αντίθετη ταχύτητα μετά την κρούση. Δηλαδή,* $υ_1' = -υ_1 = +2m/s$, *ως προς τον τοίχο (Β). Έτσι, αλλάζοντας σύστημα αναφοράς και επιστρέφοντας πάλι ως προς τον ακίνητο παρατηρητή του εδάφους, θα είναι* $υ_Σ = υ_1' + υ_0 = +4m/s$.

2) *Μετά από κάθε τέτοια κρούση του σώματος Σ με τον πρακτικά αμετάβλητης ταχύτητας τοίχο (Β), το σώμα Σ θα αυξάνει το μέτρο της ταχύτητάς του κατά* $2υ_0 = 4m/s$. *Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι κάθε τους κρούση είναι κάθετη και ελαστική με αντίρροπες ταχύτητες, με αποτέλεσμα να ικανοποιείται σε κάθε τους κρούση η σχέση* $υ_Σ + υ_Σ' = υ_0 + υ_0$ *ή* $υ_Σ' = -υ_Σ + 2υ_0$.

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com