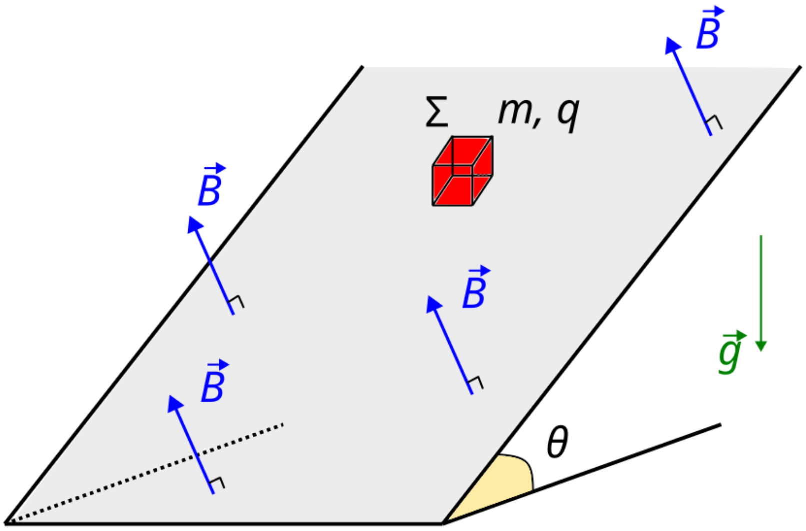
Η τριβή, η δύναμη Lorentz και η οριακή ταχύτητα

Πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\theta = 30°$ και μεγάλων διαστάσεων, αφήνουμε ακίνητο τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ένα σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων μάζας $m = 50g$ και φορτίου $q = -10mC$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης (που ισούται με τον αντίστοιχο συντελεστή οριακής τριβής) μεταξύ του σώματος Σ και του κεκλιμένου επιπέδου είναι ίσος με $\mu = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Στην περιοχή κίνησης του σώματος Σ, επικρατεί ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο με μέτρο έντασης $B = 1T$, το οποίο είναι κάθετο στο κεκλιμένο επίπεδο και με φορά όπως φαίνεται στο σχήμα.



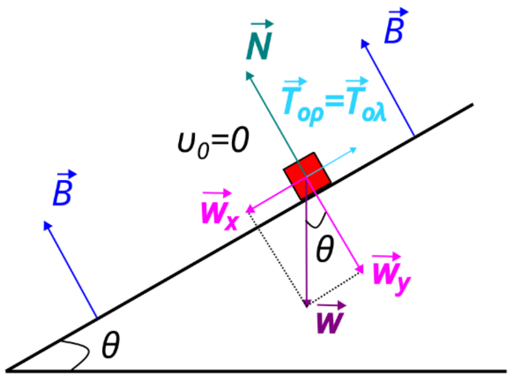
Α. Να αποδείξετε ότι το σώμα Σ θα αρχίσει τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ να κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο.

Το σώμα Σ κατά την κάθοδό του αποκτά κάποια στιγμή σταθερή (οριακή) ταχύτητα, εκτελώντας στη συνέχεια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Β. Να υπολογίσετε το μέτρο της οριακής αυτής ταχύτητας του σώματος.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $g = 10m/s^2$. Οι εκπομπές ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας να θεωρηθούν αμελητέες, όπως και η αντίσταση του αέρα.

Απάντηση



Α. Επειδή τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σώμα Σ δεν έχει ταχύτητα, συμπεραίνουμε ότι τότε δεν δέχεται δύναμη Lorentz από το μαγνητικό πεδίο. Επομένως, για να αρχίσει να κατέρχεται του κεκλιμένου επιπέδου, αρκεί το μέτρο της συνιστώσας του βάρους του σώματος στη διεύθυνση του κεκλιμένου να είναι μεγαλύτερο από το μέτρο της οριακής τριβής που εμφανίζεται μεταξύ του σώματος και του επιπέδου. Συγκεκριμένα, και με τη βοήθεια του σχήματος στο οποίο εμφανίζονται οι ασκούμενες δυνάμεις στο σώμα τη στιγμή $t_0 = 0$ έχουμε:

$$w_x = w \cdot ημθ = mg \cdot ημθ, \quad w_y = w \cdot συνθ = mg \cdot συνθ \quad \text{και} \quad T_{ορ} = T_{ολ} = μN$$

Όμως,

$$ΣF_y = 0 \Longrightarrow N = w_y \Longrightarrow N = mg \cdot συνθ$$

Άρα, για να αρχίσει το σώμα την κάθοδό του, πρέπει $w_x > T_{ορ}$ ή ισοδύναμα

$$mg \cdot ημθ > μN \Longrightarrow mg \cdot ημθ > μmg \cdot συνθ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{μ < εφθ} \quad (1)$$

Από τα δεδομένα όμως έχουμε ότι

$$εφθ = εφ30° = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{\sqrt{3}}{6} = μ$$

Με αποτέλεσμα, σύμφωνα και με τη σχέση (1), το σώμα Σ να αρχίσει την κάθοδό του στο κεκλιμένο επίπεδο, επιταχυνόμενο.

Β. Καθώς το φορτισμένο σώμα Σ κατέρχεται, αποκτά (μεταβαλλόμενη) ταχύτητα, με αποτέλεσμα εκτός από το βάρος του $\vec{w}$, την κάθετη αντίδραση $\vec{N}$ και την τριβή ολίσθησης $\vec{T}_{ολ}$, να δέχεται επιπλέον και μία δύναμη από το μαγνητικό πεδίο (τη δύναμη Lorentz $\vec{F}_L$).

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το βάρος και η κάθετη αντίδραση είναι σταθερές δυνάμεις, αλλά η τριβή ολίσθησης και η δύναμη Lorentz όχι. Συγκεκριμένα, η τριβή ολίσθησης είναι σταθερού μέτρου αλλά αλλάζει διαρκώς κατεύθυνση μένοντας πάντα αντίρροπη της ταχύτητας του σώματος, ενώ η δύναμη Lorentz εκτός από μέτρο αλλάζει και κατεύθυνση, μένοντας διαρκώς κάθετη στην ταχύτητα του σώματος Σ. Επομένως, $\vec{F}_L \perp \vec{T}_{ολ}$ σε όλη τη διάρκεια κίνησης του σώματος.

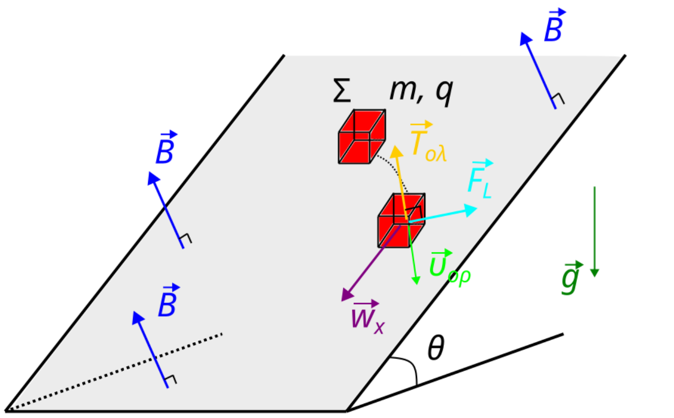
Σύμφωνα με τα παραπάνω, αντιλαμβανόμαστε ότι η κίνηση του σώματος Σ είναι επίπεδη, μένοντας διαρκώς πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο, αλλά καμπυλόγραμμη. Σε μία τυχαία χρονική στιγμή, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα ισούται με:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{w}_x + \vec{T}_{o\lambda} + \vec{F}_L$$

Το μέτρο της $\vec{F}_L$ ισούται κάθε χρονική στιγμή με $F_L = B\upsilon|q|$. Για να αποκτήσει το σώμα σταθερή (οριακή) ταχύτητα, θα πρέπει $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$, δηλαδή

$$\vec{T}_{o\lambda} + \vec{F}_L = -\vec{w}_x$$

Από εκείνη τη στιγμή και μετά δεν θα έχει λόγο να μεταβάλλει την ταχύτητά του, με αποτέλεσμα όλες οι παραπάνω δυνάμεις να παραμένουν σταθερές και το σώμα να εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.



Επειδή, όπως είπαμε και παραπάνω, ισχύει διαρκώς ότι $\vec{F}_L \perp \vec{T}_{o\lambda}$, η οριακή ταχύτητα του σώματος θα προκύψει από τη συνθήκη ισορροπίας σύμφωνα με την οποία έχουμε:

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow |\vec{w}_x| = \left|\vec{T}_{o\lambda} + \vec{F}_L\right| \Rightarrow w_x = \sqrt{T_{o\lambda}^2 + F_L^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_L^2 = w_x^2 - T_{o\lambda}^2 \Rightarrow F_L = \sqrt{w_x^2 - T_{o\lambda}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\upsilon_{o\rho}|q| = \sqrt{(mg\cdot\eta\mu\theta)^2 - (\mu mg\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_{o\rho} = \frac{mg}{B|q|}\sqrt{\eta\mu^2\theta - \mu^2\sigma\upsilon\nu^2\theta}} \quad (2)$$

Έτσι, με αντικατάσταση των δεδομένων στη σχέση (2), το μέτρο της οριακής ταχύτητας του σώματος (με την οποία εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση) προκύπτει ίσο με:

$$\upsilon_{o\rho} = \frac{50\cdot 10^{-3}\cdot 10}{1\cdot 10\cdot 10^{-3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{3}{36}\cdot\frac{3}{4}}\,m/s \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = 50\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}\,m/s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_{o\rho} = 50\sqrt{\frac{3}{16}}\,m/s \Rightarrow \upsilon_{o\rho} = 12{,}5\sqrt{3}\,m/s$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com