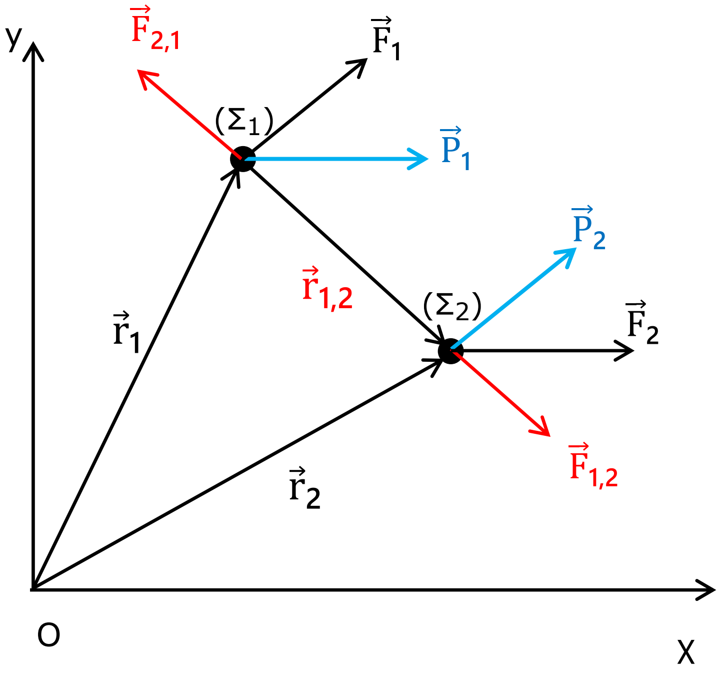
ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Το σχολικό βιβλίο αποδεικνύει τη σχέση $\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi}$ καθώς και την Αρχή διατήρησης της στροφορμής για την περίπτωση στερεού και μας “καλεί” να τα εφαρμόσουμε στην περίπτωση συστήματος υλικών σημείων που **σε καμιά περίπτωση δεν είναι αυτονόητο ότι ισχύουν, χωρίς την απαραίτητη τεκμηρίωση!** Χρειάζεται προς τούτο διευκρινιστική παρέμβαση του ΙΕΠ. Ακολουθεί μια απόδειξη της ισχύος των παραπάνω και στην περίπτωση συστήματος υλικών σημείων:



ΤΟ ΘΕΜΑ:

Έστω ένα σύστημα 2 κινούμενων υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2. $\vec{F}_{1,2}$ και $\vec{F}_{2,1}$ είναι εσωτερικές δυνάμεις (π.χ. Coulomb), και $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ εξωτερικές δυνάμεις. Κάποια στιγμή t_1 οι ορμές τους είναι $\vec{P}_1$ και $\vec{P}_2$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \Sigma\vec{\tau}^{(o)}_{\varepsilon\xi}$

Η ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$$\vec{L}_\Sigma = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 \quad \text{ή} \quad \vec{L}_\Sigma = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{P}_1 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times \vec{P}_2 + \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{P}_2}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{\upsilon}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_1 \times \Sigma\vec{F}_1 + \vec{\upsilon}_2 \times \vec{P}_2 + \vec{r}_2 \times \Sigma\vec{F}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_1) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_{1,2} + \vec{F}_2)$$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{2,1} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$ Επειδή $\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = -\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2.$$ Όμως $\vec{r}_1 + \vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2$ ή $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{1,2}$ οπότε:

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{r}_{1,2} \times \vec{F}_{1,2} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{\tau}_1^{(o)} + \vec{\tau}_2^{(o)} = \Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi}^{(o)} \quad (A)$$. Η (Α) αποδεικνύεται ότι ισχύει για οποιοδήποτε σύστημα υλικών σημείων. Γενικεύοντας συμπεραίνουμε ότι η $\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi}$ ισχύει και για σύστημα υλικών σημείων.

Παρατηρήσεις:

1. Η (Α) ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση που τα διανύσματα των ορμών και των εξωτερικών δυνάμεων δεν ανήκουν στο επίπεδο xOy που ορίζεται από τη στιγμιαία θέση των υλικών σημείων και την αρχή των αξόνων, Ο.
2. Αν $\Sigma\vec{\tau}_{\varepsilon\xi} = \vec{0}$ τότε, $\frac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} = \vec{0}$ ή $\vec{L}_\Sigma$= σταθερό ή $\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2'$ Είναι η Αρχή διατήρησης της στροφορμής για σύστημα υλικών σημείων.
3. Τα γινόμενα $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ είναι ο ορισμός της ροπής δύναμης ως προς σημείο, εν προκειμένω του Ο.
4. Αν το σύστημα των υλικών σημείων είναι μονωμένο ($\Sigma\vec{F}_{\varepsilon\xi} = 0$) τότε **δεν** ισχύει **γενικά** η Αρχή διατήρησης της στροφορμής. Μπορεί εύκολα να αποδειχτεί αυτό, στην περίπτωση του συστήματος των **δύο** υλικών σημείων Σ_1 και Σ_2 .
5. Τα παραπάνω ισχύουν για οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.
6. **Μια πρόταση**: Θα ήταν χρήσιμο να διδάσκονται οι μαθητές της θετικής το εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων μιας και διδάσκονται το εσωτερικό, και να χρησιμοποιούνται αυτά στην αυστηρότερη θεμελίωση των εννοιών της Φυσικής, στη Γ' Λυκείου.