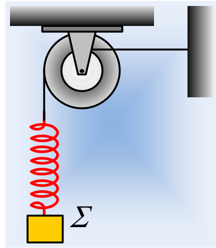
Μια ταλάντωση και μια διπλή τροχαλία



Μια διπλή τροχαλία, αποτελείται από δύο ομόκεντρους ομογενείς δίσκους με ακτίνες r=0,1m και R=0,2m και μπορεί να στρέφεται γύρω από τον σταθερό οριζόντιο άξονά της. Στην μεγάλη τροχαλία έχουμε τυλίξει ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άκρο του οποίου μέσω ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m κρέμεται ένα σώμα Σ μάζας m=4kg. Γύρω από την μικρή τροχαλία, έχει τυλιχθεί ένα δεύτερο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, το άλλο άκρο του οποίου δένεται σε σταθερό σημείο ενός τοίχου, ώστε το νήμα να είναι οριζόντιο, όπως στο σχήμα, με αποτέλεσμα το σύστημα να ισορροπεί.

i) Να υπολογίσετε την τάση του οριζόντιου νήματος

Εκτρέπουμε το σώμα Σ κατακόρυφα προς τα κάτω κατά y_1 και για t=0, το αφήνουμε να κινηθεί.

ii) Τι τιμές μπορεί να πάρει η αρχική εκτροπή y_1, ώστε στη συνέχεια να μην μηδενιστεί η τάση του οριζόντιου νήματος.

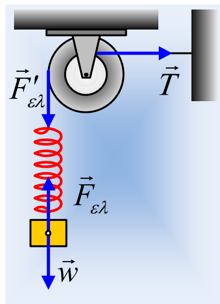
iii) Αν y_1=0,2m, να αποδείξετε ότι το Σ θα εκτελέσει ΑΑΤ και στη συνέχεια να βρείτε πώς μεταβάλλεται η τάση του οριζόντιου νήματος, σε συνάρτηση με το χρόνο, κάνοντας και τη γραφική της παράσταση.

iv) Κάποια στιγμή t_1 κόβουμε το οριζόντιο νήμα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας, του συστήματος τροχαλία-σώμα Σ σε συνάρτηση με το χρόνο, κάνοντας και τη γραφική της παράσταση, για $t>t_1$.

v) Αν t_1=14π/15 s, ποιος ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της, αμέσως μόλις κόψουμε το νήμα;

Δίνεται $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



i) Το σώμα Σ ισορροπεί, οπότε $ΣF=0$ ή $F_{ελ}=w$ ή $k \cdot Δ\ell = mg = 40N$

$$Δ\ell = \frac{mg}{k} = \frac{4 \cdot 10}{100} m = 0{,}4m$$

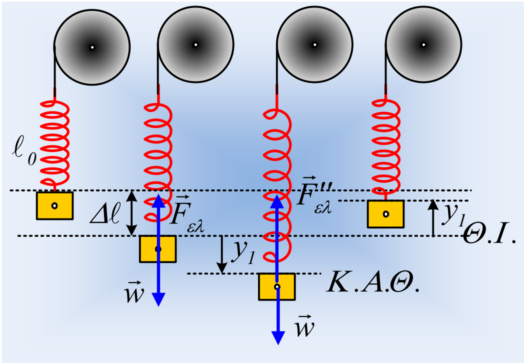
Εξάλλου και η τροχαλία ισορροπεί με την επίδραση της δύναμης του ελατηρίου $F'_{ελ}$ και της τάσης του νήματος (το βάρος και η δύναμη από τον άξονα, δεν έχουν ροπή ως προς τον άξονά της και δεν έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα), οπότε:

$$Στ = 0 \rightarrow F'_{ελ} \cdot R - T \cdot r = 0 \rightarrow k \cdot Δ\ell \cdot R = T \cdot r \quad (1)$$

$$T = k \cdot Δ\ell \frac{R}{r} = 40 \frac{0{,}2}{0{,}1} N = 80N$$

ii) Για να μην μηδενιστεί η τάση του οριζόντιου νήματος, σύμφωνα με την (1) θα πρέπει να μην μηδενιστεί και η δύναμη του ελατηρίου $F'_{ελ}$, η οποία πρέπει να έχει φορά προς τα κάτω.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το ελατήριο να έχει πάντα κάποια επιμήκυνση. Αλλά τότε το σώμα Σ φτάνοντας στο ανώτερο σημείο της ταλάντωσής του, να μην φτάνει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου:



Συνεπώς $y_1 < \Delta\ell$ ή $y_1 < 0{,}4m$.

iii) Αν πάρουμε το σώμα σε μια τυχαία θέση η οποία είναι κάτω από τη θέση ισορροπίας, επέχοντας κατά y από αυτήν, θεωρώντας θετική την προς τα κάτω φορά έχουμε:

$$\Sigma F = w - F''_{\varepsilon\lambda} = mg - k(\Delta\ell + y) = mg - k\Delta\ell - ky = -ky$$

Συνεπώς η κίνηση του σώματος είναι ΑΑΤ γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας με πλάτος ίσο με την αρχική απομάκρυνση y_1. Αλλά τότε η απομάκρυνση του σώματος θα δίνεται από την εξίσωση:

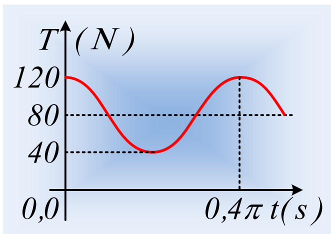
$$y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$$

Όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{4}} rad.s = 5rad/s$, ενώ για t=0, y=+A, οπότε $+A = A \cdot \eta\mu\varphi_0$ ή

$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Αλλά τότε με βάση αυτά η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$y = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Έτσι επιστρέφοντας στο 2ο νόμο για την τυχαία θέση, για το **μέτρο** της δύναμης του ελατηρίου έχουμε:



$$\Sigma F = -ky \rightarrow mg - |F_{\varepsilon\lambda}| = -100 \cdot 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$|F_{\varepsilon\lambda}| = 40 + 20 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

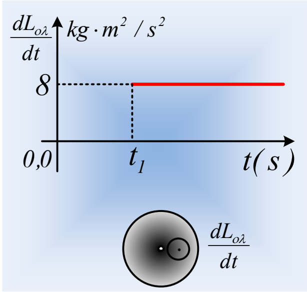
Όμως $|F'_{\varepsilon\lambda}| = |F_{\varepsilon\lambda}|$ και με επιστροφή στην (1) παίρνουμε:

$$T = |F'_{\varepsilon\lambda}| \frac{R}{r} = 80 + 40 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό σχήμα.

iv) Από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα Σ-τροχαλία παίρνουμε:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = \Sigma\tau_{εξ}$$

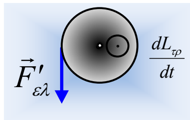


Όπου $\frac{dL_{ολ}}{dt}$ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας και $\Sigma\tau_{εξ}$ το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων κατά (ως προς) τον ίδιο άξονα. Αλλά η μόνη εξωτερική δύναμη που εμφανίζει ροπή ως προς τον άξονα είναι το βάρος του σώματος Σ, οπότε:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = \Sigma\tau_{εξ} = w \cdot R = mgR = 4 \cdot 10 \cdot 0{,}2 kg \cdot m^2 / s^2 = 8 kg \cdot m^2 / s^2 .$$

Προφανώς η ροπή αυτή παραμένει σταθερή και η γραφική παράσταση του μέτρου της είναι αυτή του σχήματος, ενώ είναι οριζόντια, πάνω στον άξονα περιστροφής και με φορά προς τον αναγνώστη.

v) Για τον αντίστοιχο ρυθμό μεταβολής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της έχουμε:



$$\frac{dL_{τρ}}{dt} = \Sigma\tau = F'_{ελ} \cdot R$$

Αλλά τη στιγμή t_1 το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$|F'_{ελ}| = |F_{ελ}| = 40 + 20 \cdot ημ\left(5t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

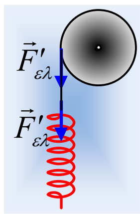
$$|F'_{ελ}| = 40 + 20 \cdot ημ\left(5\frac{14\pi}{15} + \frac{\pi}{2}\right) = 40 + 20 \cdot ημ\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right) = 30 N$$

Άρα παίρνουμε:

$$\frac{dL_{τρ}}{dt} = F'_{ελ} \cdot R = 30 \cdot 0{,}2 kg \cdot m^2 / s^2 = 6 kg \cdot m^2 / s^2 .$$

Και αυτός ο ρυθμός έχει την διεύθυνση του άξονα περιστροφής της τροχαλίας και φορά προς τα έξω στο σχήμα.

Σχόλια



1) Το ελατήριο ασκεί στο **νήμα** τη δύναμη $F'_{ελ}$, η οποία μεταφέρεται μέσω του νήματος και μια ίσου μέτρου ασκείται στην τροχαλία. Αυτή τη δύναμη σχεδιάσαμε απ' αρχής στην τροχαλία, ονομάζοντάς την $F'_{ελ}$.

2) Βρήκαμε παραπάνω ότι για το σύστημα:

$$\frac{dL_{ολ}}{dt} = 8kg \cdot m^2 / s^2 .$$

Ενώ για την τροχαλία

$$\frac{dL_{τρ}}{dt} = 6kg \cdot m^2 / s^2 .$$

Αυτό σημαίνει ότι στροφορμή ως προς τον άξονα περιστροφής εμφανίζει και το σώμα Σ! Πράγματι κάθε στιγμή η στροφορμή του Σ ως προς τον άξονα περιστροφής της τροχαλίας έχει μέτρο L=mυR και στην περίπτωσή μας, την στιγμή t_1 αυτή αυξάνεται με ρυθμό:

$$\frac{dL_{Σ}}{dt} = 2kg \cdot m^2 / s^2 .$$

Βέβαια αυτός ο ρυθμός καθορίζεται από τη συνισταμένη που ασκείται στο Σ και αυτή δεν είναι σταθερή. Έτσι η τιμή που αναφέραμε παραπάνω είναι η τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του Σ **μόνο** τη στιγμή t_1.

dmargaris@gmail.com