<u>Περί ακτίνας και κέντρου καμπυλότητας μιας βολής</u>

Σώμα μάζας m, βάλλεται από το έδαφος με δεδομένη ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ και υπό γωνία φ ως προς αυτό, μέσα στο ομογενές πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$. Η αντίσταση του αέρα αγνοείται. Τη χρονική στιγμή t, το σώμα διέρχεται απ' το τυχαίο σημείο Α της τροχιάς του, ανερχόμενο.

1) Να εκφραστεί η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς σαν συνάρτηση του χρόνου.

2) Δείξτε ότι η ακτίνα καμπυλότητας λαμβάνει τη μικρότερη τιμή τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του.

3) Να υπολογιστεί η γωνία βολής φ, ώστε το κέντρο καμπυλότητας που αντιστοιχεί στο ανώτερο σημείο της τροχιάς να βρίσκεται στο έδαφος.

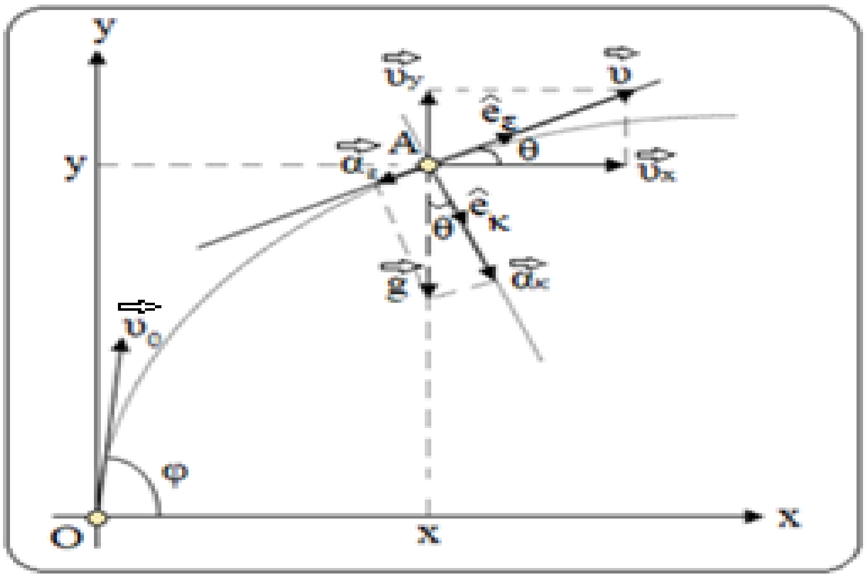
4) Δείξτε ότι αν το σώμα βληθεί υπό γωνία $\varphi = 45^0$, τότε η απόσταση των κέντρων καμπυλότητας που αντιστοιχούν στο αρχικό και στο τελικό σημείο της τροχιάς του σώματος είναι ίση με το βεληνεκές της βολής.

5) i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία κινείται το στιγμιαίο κέντρο καμπυλότητας του σώματος.

ii) Δείξτε ότι η ταχύτητα αυτή μηδενίζεται όταν το σώμα διέρχεται από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του.

6) Αν η βολή γίνει από ύψος h, τότε να βρεθεί το μέγιστο βεληνεκές και η γωνία βολής φ για την οποία επιτυγχάνεται αυτό.

<u>Απάντηση</u>



1) Οι εξισώσεις κίνησης που διέπουν την κίνηση του σώματος είναι:

$\upsilon_x = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$ **(1),** $x = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi t$ **(2),** $\upsilon_y = \upsilon_0 \eta\mu\varphi - gt$ **(3)** και $y = \upsilon_0 \eta\mu\varphi t - \frac{1}{2}gt^2$ **(4).**

Τη χρονική στιγμή t το σώμα διέρχεται απ' το σημείο Α της τροχιάς του με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που εφάπτεται στην τροχιά, όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Η επιτάχυνση του σώματος σε κάθε θέση είναι $\vec{\alpha} = \vec{g}$. Αναλύουμε την επιτάχυνση σε κεντρομόλο $\vec{\alpha}_\kappa$ και επιτρόχια $\vec{\alpha}_\varepsilon$, τότε απ' το σχήμα προκύπτει

$\alpha_\kappa = g\sigma\upsilon\nu\theta \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{R} = g\frac{\upsilon_x}{\upsilon} \Rightarrow R = \frac{\upsilon^3}{\upsilon_x g}$ **(5) .** Θέτοντας στη σχέση αυτή

$\upsilon = \left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2\right)^{1/2} \xrightarrow{(1),(3)} \upsilon = \left(\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 \eta\mu\varphi g t + g^2 t^2\right)^{1/2}$ προκύπτει τελικά

$R(t) = \left(\upsilon_0^2 - 2\upsilon_0 \eta\mu\varphi g t + g^2 t^2\right)^{3/2} / \upsilon_0 g \sigma\upsilon\nu\varphi$ **(6).**

2) <u>**1ος τρόπος**</u>: η ακτίνα καμπυλότητας είναι $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow R = \frac{\upsilon^2}{\alpha_\kappa}$. Τη στιγμή που το σώμα διέρχεται από το ανώτερο σημείο της τροχιάς του, είναι υ_y=0, η επιτρόχιος επιτάχυνση μηδενίζεται, η κεντρομόλος επιτάχυνση γίνεται μέγιστη και ίση με g, ενώ ταυτόχρονα το μέτρο της ταχύτητας είναι ελάχιστο

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_x^2 + 0} = \upsilon_x = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi$, οπότε $R_{\min} = \frac{\upsilon_{\min}^2}{\alpha_{\kappa(\max)}} = \frac{\upsilon_0^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi}{g}$

2^ος τρόπος:
Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς είναι υ_y=0 και απ' τη σχέση (3) προκύπτει $t = \upsilon_0 \eta\mu\varphi / g$ οπότε αντικαθιστώντας στη σχέση (6) παίρνουμε $R = \dfrac{\upsilon_0^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi}{g}$.

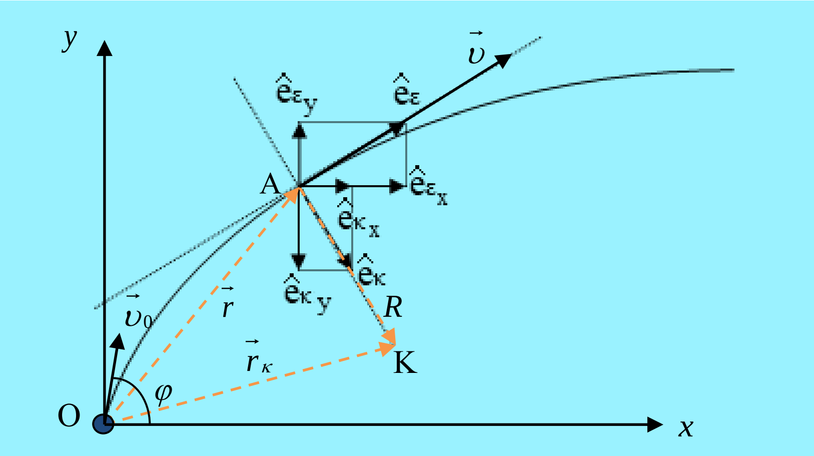
Θα δείξουμε ότι η παραπάνω τιμή αντιπροσωπεύει την ελάχιστη τιμή της ακτίνας καμπυλότητας. Αρκεί να ισχύουν $\dfrac{dR}{dt} = 0$ και $\dfrac{d^2R}{dt^2} > 0$ για την παραπάνω χρονική στιγμή. Λαμβάνοντας υπόψη ότι υ_x=σταθερή και $\upsilon_y' = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\upsilon_0 \eta\mu\varphi - gt) = -g$, έχουμε απ' τη σχέση (5):

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2\right)^{3/2}}{\upsilon_x g} = \frac{3}{2\upsilon_x g}\left(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2\right)^{1/2} 2\upsilon_y\upsilon_y' = \frac{3\upsilon_y'}{\upsilon_x g}\left(\upsilon_y\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}\right) = \frac{3(-g)}{\upsilon_x g}\left(\upsilon_y\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}\right)$$ και επειδή $\upsilon_y = 0$ προκύπτει $\dfrac{dR}{dt} = 0$.

Για τη 2^η παράγωγο έχουμε:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = \frac{3(-g)}{\upsilon_x g}\left(\upsilon_y'\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2} + \upsilon_y\frac{2\upsilon_y\upsilon_y'}{2\sqrt{\upsilon_x^2+\upsilon_y^2}}\right) \xrightarrow{\upsilon_y=0,\upsilon_y'=-g} \frac{d^2R}{dt^2} = \frac{3(-g)}{\upsilon_x g}(-g)\upsilon_x = 3g > 0$$

3)



Αν R είναι η ακτίνα καμπυλότητας που αντιστοιχεί στο σημείο Α της τροχιάς και Κ το κέντρο καμπυλότητας, τότε ισχύει: $\vec{r}_\kappa = \vec{r} + R\hat{e}_\kappa$ **(7)**, όπου $\hat{e}_\kappa$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην εφαπτόμενη ευθεία που διέρχεται απ' το σημείο Α, $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος και $\vec{r}_\kappa$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου καμπυλότητας Κ.

Η ταχύτητα του σώματος γράφεται

$$\vec{\upsilon} = \upsilon\hat{e}_\varepsilon \Rightarrow \hat{e}_\varepsilon = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \frac{\upsilon_x\hat{i} + \upsilon_y\hat{j}}{\upsilon} = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}\hat{i} + \frac{\upsilon_y}{\upsilon}\hat{j} \Rightarrow \hat{e}_\varepsilon = \left(\frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \frac{\upsilon_y}{\upsilon}\right)$$ είναι οι συνιστώσες του εφαπτόμενου μοναδιαίου διανύσματος $\hat{e}_\varepsilon$ στους άξονες x και y αντίστοιχα.

Για τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_\varepsilon$ και $\hat{e}_\kappa$ που είναι κάθετα μεταξύ τους παίρνουμε

$$\hat{e}_\varepsilon \cdot \hat{e}_\kappa = 0 \Rightarrow \left(\frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \frac{\upsilon_y}{\upsilon}\right)\cdot\left(\hat{e}_{\kappa_x}, \hat{e}_{\kappa_y}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\upsilon_x}{\upsilon}\hat{e}_{\kappa_x} + \frac{\upsilon_y}{\upsilon}\hat{e}_{\kappa_y} = 0.$$

Από την τελευταία εξίσωση, δεδομένου ότι το διάνυσμα $\hat{e}_\kappa$ έχει μέτρο 1 πρέπει

$$\hat{e}_{\kappa_x} = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \text{ και } \hat{e}_{\kappa_y} = \frac{-\upsilon_x}{\upsilon} \text{ ή } \hat{e}_{\kappa_x} = \frac{-\upsilon_y}{\upsilon} \text{ και } \hat{e}_{\kappa_y} = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη όμως ότι το $\hat{e}_\kappa$ κατευθύνεται προς τα κοίλα της τροχιάς και ότι κατά την άνοδο του σώματος για τις συνιστώσες των μοναδιαίων ισχύουν $\hat{e}_{\varepsilon_x} > 0$, $\hat{e}_{\varepsilon_y} > 0$, $\hat{e}_{\kappa_x} > 0$ και $\hat{e}_{\kappa_y} < 0$, προκύπτει τελικά

$$\hat{e}_\kappa = \left(\frac{\upsilon_y}{\upsilon}, \frac{-\upsilon_x}{\upsilon} \right) \Rightarrow \hat{e}_{\kappa,x} = \frac{\upsilon_y}{\upsilon} \kappa\alpha\iota\, \hat{e}_{\kappa,y} = -\frac{\upsilon_x}{\upsilon}.$$

Η θέση του κέντρου καμπυλότητας σε καρτεσιανές συντεταγμένες, θα προκύψει από τη σχέση **(7):**

$$x_\kappa = x + R\frac{\upsilon_y}{\upsilon} \quad \text{και} \quad y_\kappa = y - R\frac{\upsilon_x}{\upsilon}$$

και αντικαθιστώντας την ακτίνα R από τη σχέση (5) προκύπτουν τελικά

$$x_\kappa = x + \frac{\upsilon^3}{\upsilon_x g}\frac{\upsilon_y}{\upsilon} = x + \frac{\upsilon^2}{g}\frac{\upsilon_y}{\upsilon_x} \quad \textbf{(8)} \quad \text{και} \quad y_\kappa = y - \frac{\upsilon^3}{g\upsilon_x}\frac{\upsilon_x}{\upsilon} = y - \frac{\upsilon^2}{g} \quad \textbf{(9)}$$

Το κέντρο καμπυλότητας θα βρίσκεται στο έδαφος όταν

$$y_\kappa = 0 \Rightarrow gy = \upsilon^2 \Rightarrow g\left(\upsilon_0 \eta\mu\varphi t - \frac{1}{2}gt^2 \right) = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \quad \text{και θέτοντας} \quad t = \frac{\upsilon_0 \eta\mu\varphi}{g}$$

(χρονική στιγμή που φτάνει το σώμα στο ανώτερο σημείο της τροχιάς) και $\upsilon_x = \upsilon_0 \sigma\upsilon\nu\varphi$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\upsilon_0^2 \eta\mu^2\varphi - \frac{1}{2}\upsilon_0^2 \eta\mu^2\varphi = \upsilon_0^2 \sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow \frac{1}{2}\upsilon_0^2\eta\mu^2\varphi = \upsilon_0^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi \Rightarrow \varepsilon\varphi\varphi = \sqrt{2} \Rightarrow \varphi \cong 55^0$$

4) Στο αρχικό σημείο της τροχιάς (σημείο βολής) όπως και στο τελικό σημείο (σημείο πρόσκρουσης στο έδαφος) η y συνιστώσα της θέσης του σώματος μηδενίζεται ενώ το μέτρο της ταχύτητας είναι το ίδιο, επομένως η σχέση **(9)** δίνει για την y συνιστώσα της θέσης του κέντρου καμπυλότητας $y_{\kappa,0} = y_{\kappa,t_{o\lambda}} = -\frac{\upsilon_0^2}{g}$. Αντίστοιχα για την x συνιστώσα της θέσης του κέντρου καμπυλότητας τη στιγμή $t = 0$ παίρνουμε από τη σχέση **(8)**

$$x_{\kappa,0} = 0 + \frac{\upsilon_0^2}{g}\frac{\upsilon_0\eta\mu\varphi}{\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{\upsilon_0^2}{g}\varepsilon\varphi\varphi$$, ενώ τη χρονική στιγμή $t = t_{o\lambda} = \frac{2\upsilon_0\eta\mu\varphi}{g}$ είναι $\upsilon_y = \upsilon_0\eta\mu\varphi - gt_{o\lambda} = -\upsilon_0\eta\mu\varphi$,

$$x_\kappa = S + \frac{\upsilon_0^2}{g}\frac{(-\upsilon_0\eta\mu\varphi)}{\upsilon_0\sigma\upsilon\nu\varphi} = S - \frac{\upsilon_0^2}{g}\varepsilon\varphi\varphi = S - x_{\kappa,0} \Rightarrow x_{\kappa,0} + x_\kappa = S$$ για κάθε γωνία βολής.

Η απόσταση των κέντρων καμπυλότητας δίνεται από τη σχέση $d = x_{\kappa,0} - x_\kappa = x_{\kappa,0} - \left(S - x_{\kappa,0}\right) = 2x_{\kappa,0} - S$.

Για γωνία βολής $\varphi = 45^0$ το βεληνεκές είναι $S = \frac{\upsilon_0^2 \eta\mu 2\varphi}{g} = \frac{\upsilon_0^2}{g} = x_{\kappa,0}$, επομένως $d = 2S - S = S$.

5) i) Θέτοντας $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$ στις σχέσεις **(8)** και **(9)** και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνουμε:

$$\upsilon_{\kappa,x} = \frac{dx_\kappa}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{g\upsilon_x}\frac{d}{dt}\left(\upsilon_x^2\upsilon_y + \upsilon_y^3\right) = \upsilon_x + \frac{1}{g\upsilon_x}\left(\upsilon_x^2\frac{d\upsilon_y}{dt} + \frac{d}{dt}\upsilon_y^3 \right) = \upsilon_x + \frac{1}{g\upsilon_x}\left[\upsilon_x^2(-g) + 3\upsilon_y^2(-g) \right]$$ και

κάνοντας πράξεις καταλήγουμε $\upsilon_{\kappa,x} = -\frac{3\upsilon_y^2}{\upsilon_x}$.

Αντίστοιχα για την y συνιστώσα της ταχύτητας

$\upsilon_{K,y}=\frac{dy_\kappa}{dt}=\frac{dy}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_x^2}{g}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\upsilon_y^2}{g}\right)=\upsilon_y-0-\frac{1}{g}2\upsilon_y\frac{d\upsilon_y}{dt}=\upsilon_y-\frac{2\upsilon_y}{g}(-g)=3\upsilon_y$. Παρατηρούμε ότι ενώ το σώμα κινείται προς τα δεξιά, το κέντρο καμπυλότητας κινείται προς τα αριστερά.

Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου καμπυλότητας είναι

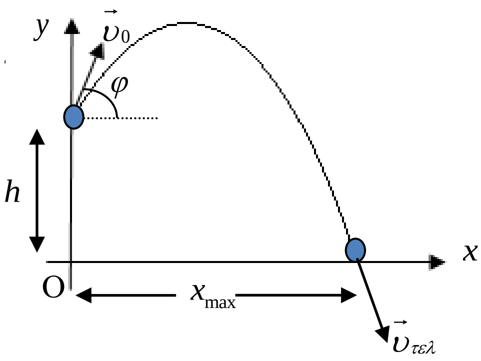
$$\upsilon_\kappa=\sqrt{\upsilon_{\kappa,x}^2+\upsilon_{\kappa,y}^2}=\sqrt{\frac{9\upsilon_y^4}{\upsilon_x^2}+9\upsilon_y^2}=\sqrt{9\upsilon_y^2\left(1+\frac{\upsilon_y^2}{\upsilon_x^2}\right)}=\sqrt{\frac{9\upsilon_y^2\upsilon^2}{\upsilon_x^2}}=\frac{3\upsilon\upsilon_y}{\upsilon_x}$$

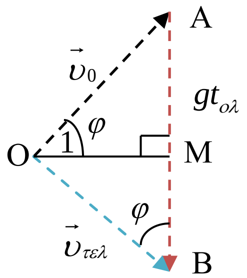
ii) Στο ανώτερο σημείο της τροχιάς του σώματος είναι $\upsilon_y=0$ οπότε προκύπτει $\upsilon_\kappa=0$.

6) Στην τυχαία θέση η ταχύτητα του σώματος γράφεται:

$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_x+\vec{\upsilon}_y=\vec{\upsilon}_{0,x}+(\vec{\upsilon}_{0,y}+\vec{g}t)=\left(\vec{\upsilon}_{0,x}+\vec{\upsilon}_{0,y}\right)+\vec{g}t\Rightarrow\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_0+\vec{g}t$.

Όταν το σώμα προσγειώνεται στο έδαφος είναι $t=t_{ολ}$ και $\upsilon=\upsilon_{τελ}$.





Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(\mathrm{AB})(\mathrm{OM})=\frac{1}{2}(gt_{ολ})(\upsilon_0 συνφ)\Rightarrow \mathrm{E}=\frac{1}{2}gx\Rightarrow x=\frac{2E}{g}$, όπου $x=\upsilon_0 συνφ t_{ολ}$ είναι το βεληνεκές. Το βεληνεκές γίνεται μέγιστο (x_{max}) όταν μεγιστοποιείται το εμβαδόν του τριγώνου (E_{max}).

Αν $\theta=\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$, το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ γράφεται $\mathrm{E}=\frac{1}{2}(\mathrm{OA})(\mathrm{OB})ημθ$ και μεγιστοποιείται όταν $ημθ=1$, δηλαδή η γωνία θ είναι ορθή. Τότε $\vec{\upsilon}_0\perp\vec{\upsilon}_{τελ}$ και το μέγιστο εμβαδόν είναι ίσο με $\mathrm{E}_{max}=\frac{\upsilon_0\upsilon_{τελ}}{2}$.

Η τελική ταχύτητα υπολογίζεται από τη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ του σημείου βολής και του σημείου προσγείωσης του σώματος στο έδαφος

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2+mgh=\frac{1}{2}m\upsilon_{τελ}^2\Rightarrow\upsilon_{τελ}=\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}.$$

Το μέγιστο βεληνεκές τελικά είναι $x_{max}=\frac{2}{g}\mathrm{E}_{max}=\frac{2}{g}\frac{\upsilon_0\upsilon_{τελ}}{2}=\frac{\upsilon_0}{g}\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}$ Επειδή η γωνία $\mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ είναι ορθή, τότε $\hat{\mathrm{O}}_1=\mathrm{O}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{A}=φ$ ως οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες και προκύπτει ότι η γωνία μεγιστοποίησης του βεληνεκούς ικανοποιεί τη σχέση $εφφ_{max,βεληνεκούς}=\frac{(\mathrm{OA})}{(\mathrm{OB})}=\frac{\upsilon_0}{\upsilon_{τελ}}=\frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2+2gh}}$ Αν h=0 τότε προκύπτουν τα γνωστά $x_{max}=\frac{\upsilon_0^2}{g}$ και $εφφ_{max,βεληνεκούς}=1\Rightarrow φ_{max,βεληνεκούς}=45^0$