ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Συνάρτηση είναι η απεικόνιση ενός αριθμού σε έναν άλλο.
Ανάλογα **τελεστής** ορίζεται γενικά ως μία συνάρτηση που δρα πάνω σε κάποια άλλη συνάρτηση, μετασχηματίζοντάς την κατά ένα καθορισμένο τρόπο. Μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης, καθώς οι συναρτήσεις δρουν συνήθως πάνω σε μεμονωμένα «αντικείμενα», ενώ ένας τελεστής μπορεί να δράσει πάνω στη «μορφή» μιας συνάρτησης ως σύνολο και να δώσει μια άλλη συνάρτηση.
Οποιοδήποτε μετασχηματισμός βαθμωτού μεγέθους, διανύσματος (στροφή, επιμήκυνση, μεταφορά) είναι δράση τελεστή. Υπάρχει μηδενικός, μοναδιαίος, αντίστροφος, γραμμικός τελεστής. Ο d /dx λέγεται τελεστής παραγώγισης.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟΝ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Η έννοια της παραγώγισης ενός βαθμωτού ή διανυσματικού πεδίου στον χώρο διευκολύνεται με την εισαγωγή του τελεστή ∇ (*Ανάδελτα* ή *Nabla*), ο οποίος ορίζεται ως:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}}$$

Διακρίνονται οι τρεις παρακάτω περιπτώσεις, ανάλογα με το εάν το πεδίο (η συνάρτηση) στο οποίο ο τελεστής αυτός επιδρά είναι βαθμωτό ή διανυσματικό:

ΟΝΟΜΑΣΙΑ	ΟΡΙΣΜΑ	ΤΡΟΠΟΣ ΔΡΑΣΗΣ	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑ
Κλίση (grad)	**Βαθμωτό**	$\vec{\nabla} f$	**Διανυσματικό**
Απόκλιση (div)	Διανυσματικό	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$	Βαθμωτό
Στροβιλισμός (curl)	**Διανυσματικό**	$\vec{\nabla} \times \vec{F}$	**Διανυσματικό**

Το σύμβολο $\vec{\nabla}$ ονομάζεται “del” (ντέλ), ή “nabla” (νάμπλα) και δεν συναντάται ποτέ μόνο του. Είναι ένας τελεστής που αναφέρεται πάντα σε μια συνάρτηση. Δεν είναι διάνυσμα γιατί δεν έχει μέτρο και κατεύθυνση.

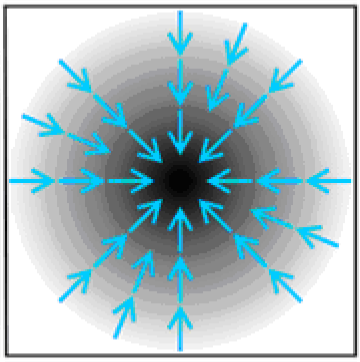
ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΘΜΩΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

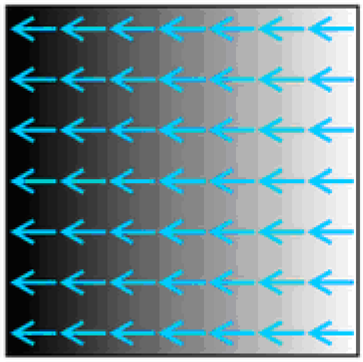
Ως κλίση ενός βαθμωτού πεδίου (συνάρτησης) f(x,y,z) ορίζεται ως το διανυσματικό πεδίο:

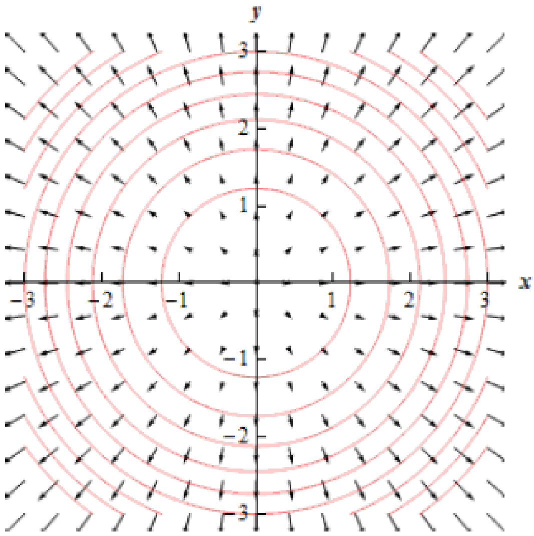
$$\boxed{\operatorname{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}}$$

Η βάθμωση δείχνει την κατεύθυνση προς την οποία έχουμε μέγιστη αύξηση της συνάρτησης. Κάθετα στην ισοσταθμική επιφάνεια, που είναι η επιφάνεια όπου η f έχει σταθερή τιμή.
Η γεωμετρική ερμηνεία της κλίσης μιας βαθμωτής συνάρτησης είναι η εξής:
Αν έχουμε μια συνάρτηση c = f(x,y) στο επίπεδο, τότε η κλίση της f(x,y) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο (x,y).
Αν έχουμε μια συνάρτηση c = f(x,y,z) στο χώρο, τότε η κλίση της f(x,y,z) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (x,y,z)
παράδειγμα: Η ένταση ηλεκτρικού πεδίου E= - grad V. Οπότε στην περίπτωση του σημειακού φορτίου:
V = $k\frac{Q}{R}$, grad V = $\frac{\partial V}{\partial R} = -k\frac{Q}{R^2}$, οπότε E = - grad V $= k\frac{Q}{R^2}$, όπως γνωρίζουμε.
Επίσης η δύναμη είναι η βάθμωση της δυναμικής ενέργειας.

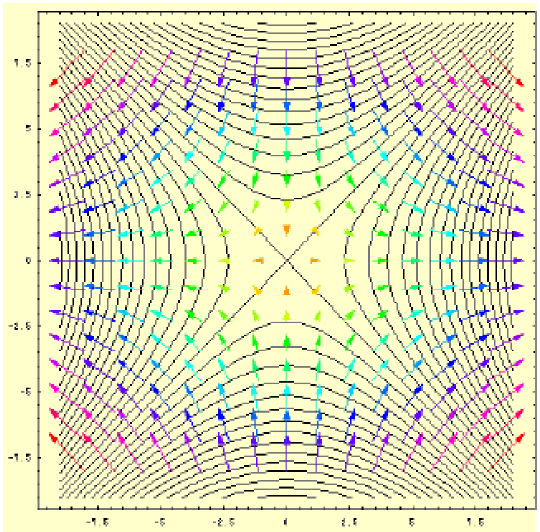
Γραφική απεικόνιση της συνάρτησης f και της βάθμωσης της f η οποία είναι διανυσματική. Η συνάρτηση αναπαρίσταται χρωματικά, όσο πιο μαύρο είναι ένα σημείο, τόσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της συνάρτησης. Η κλίση δείχνει προς την κατεύθυνση (μέγιστης) αύξησης των τιμών.
Αριστερά θα μπορούσε να είναι το ηλεκτρικό πεδίο σημειακού θετικού φορτίου και δεξιά ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με τη φορά των δυναμικών γραμμών αντίθετα από τα βέλη.







$$f(x,y)=x^2+y^2$$
$$\text{gradf}=\vec{\nabla}f=2x\hat{i}+2y\hat{j}$$



$$f(x,y)=x^2-y^2$$
$$\text{gradf}=\vec{\nabla}f=2x\hat{i}-2y\hat{j}$$

Κλίση

Αν έχουμε μια βαθμωτή συνάρτηση με ανεξάρτητες μεταβλητές τις διαστάσεις του χώρου $f(x,y,z)$ τότε η κλίση της βαθμωτής συνάρτησης είναι το διάνυσμα $\nabla f = gradf = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$. Το διάνυσμα της κλίσης, έχει διάσταση όσες οι ανεξάρτητες μεταβλητές της συνάρτησης.

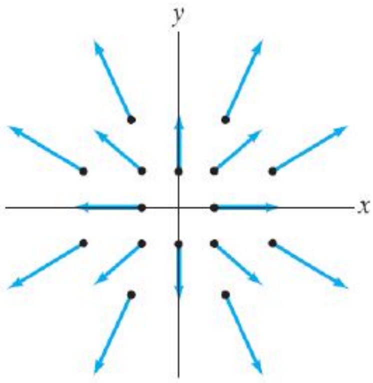
Αν έχουμε μια διανυσματική συνάρτηση $F(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2,x_3) \\ f_2(x_1,x_2,x_3) \\ f_3(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix}$ τότε η κλίση της διανυσματικής συνάρτησης είναι ο πίνακας $\nabla F = gradF = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$. Οι στήλες του πίνακα είναι όσες οι ανεξάρτητες μεταβλητές της συνάρτησης. Ο πίνακας που προκύπτει, αποτελεί και τον Ιακωβιανό πίνακα της συνάρτησης F.

Γενικά μιλώντας, η κλίση τανυστή n βαθμού δίνει έναν τανυστή $n+1$ βαθμού (π.χ. η βαθμωτή συνάρτηση βαθμού 0, έδωσε διάνυσμα βαθμού 1). Η επιπλέον διάσταση του τανυστή, είναι ίση με τον αριθμό ανεξάρτητων μεταβλητών της συνάρτησης.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$



Παράδειγμα

$$\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 1 + 1 = 2$$

Η *απόκλιση (divergence)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος. Προσομοιώνει την ροή υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε σταθερή (θετική) ροή (εκροή) σε κάθε σημείο του χώρου.

Αν ήταν $\vec{F}$ = (-x,-y), τότε η απόκλιση θα ήταν -2 και θα είχαμε αρνητική εκροή.

Αν το υγρό κινείται προς τα έξω (π.χ. υπάρχουν πηγές μέσα στον ιδεατό χώρο που μελετούμε) τότε η απόκλιση είναι θετική και περιγράφει ποσοτικά αυτήν την διόγκωση (κίνηση προς τα έξω, εκροή από τον ιδεατό χώρο).

Αντίθετα, αν η κίνηση του υγρού είναι προς τα μέσα (π.χ. υπάρχει συνεχής τροφοδοσία από έξω προς τα μέσα και κατανάλωση ρευστού στο εσωτερικό του ιδεατού χώρου) τότε η τιμή divF είναι αρνητική.

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{\Pi}$ για τα οποίο ισχύει div$\vec{\Pi}$ =0 ονομάζεται ασυμπίεστο ή σωληνοειδές.

Γεωμετρικά η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{\Pi}$ σ' ένα σημείο P δείχνει πόσο το διάνυσμα $\vec{\Pi}$ απλώνεται, (αποκλίνει) σ' αυτό το σημείο.

Στη μηχανική ρευστών η εξίσωση συνέχειας είναι: $\operatorname{div}(\rho\cdot\vec{\upsilon}) + \dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

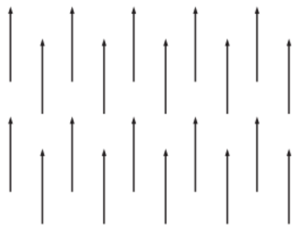
Αν η πυκνότητα είναι σταθερή με το χρόνο προκύπτει $\operatorname{div}(\rho\cdot\vec{\upsilon}) = 0$, άρα $\operatorname{div}\vec{\upsilon} = 0$ που δείχνει ότι είναι ασυμπίεστο.

φυσική σημασία της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου, που έχει σχέση με τη ροή των ρευστών. Έστω $\rho(x,y,z)$ η πυκνότητα ενός ρευστού και $\mathbf{v}(x,y,z)$ η ταχύτητα με την οποία κινείται το ρευστό στο σημείο (x,y,z). Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x,y,z)=\rho(x,y,z)\mathbf{v}(x,y,z)$ ονομάζεται **πυκνότητα ροής** του ρευστού και έχει διαστάσεις:

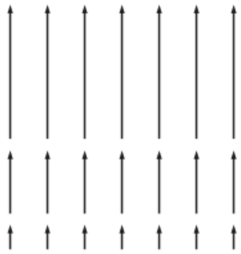
$$[\mathbf{F}] = \frac{\text{μάζα}}{[\text{μονάδα εμβαδού}]\times[\text{μονάδα χρόνου}]}$$

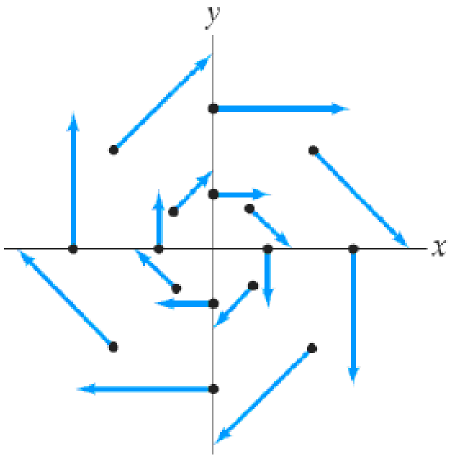
και μας λέει πόση μάζα του ρευστού ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου ρέει κατά τη διεύθυνση της ταχύτητας **v** και στο σημείο (x,y,z). Η απόκλιση του **F**, δηλαδή το $\nabla\cdot\mathbf{F}$, παριστάνει *τον συντελεστή μεταβολής της μάζας ως προς το χρόνο ανά μονάδα όγκου στο σημείο* (x,y,z).

Η συνάρτηση $\vec{\upsilon} = (0, 2)$ έχει απόκλιση μηδέν



Η συνάρτηση $\vec{\upsilon} = (0, y)$ έχει απόκλιση 1





Παράδειγμα

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j} \;\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

Η *απόκλιση (divergence)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό μέγεθος. Προσομοιώνει την ροή υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Στο παράδειγμα αυτό έχουμε μηδενική ροή σε κάθε σημείο του χώρου (το ρευστό μόνο στροβιλίζεται).

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

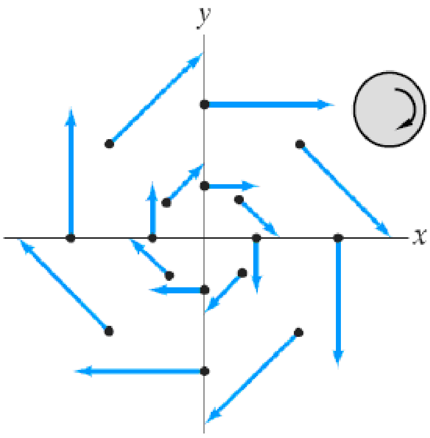
$$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\times\left(F_1\hat{i} + F_2\hat{j} + F_3\hat{k}\right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Η *στροβιλισμός (curl)* ενός διανυσματικού πεδίου είναι διανυσματικό μέγεθος. Δείχνει τον στροβιλισμό υποθετικού ρευστού στο εν λόγω σημείο του χώρου, υποθέτοντας πως το διανυσματικό πεδίο στο οποίο επιδρά εκφράζει την ταχύτητα του ρευστού.

Όταν ένα διανυσματικό πεδίο έχει μηδενικό στροβιλισμό αποκαλείται αστρόβιλο πεδίο.

Ένας πρακτικός τρόπος για να βρεθεί ο στροβιλισμός ενός πεδίου σε κάποιο σημείο του είναι να μελετηθεί η στροφική κίνηση υποθετικού επίπεδου δίσκου φερόμενου στο σημείο αυτό.

Παρατήρηση: ο στροβιλισμός λέγεται και rot



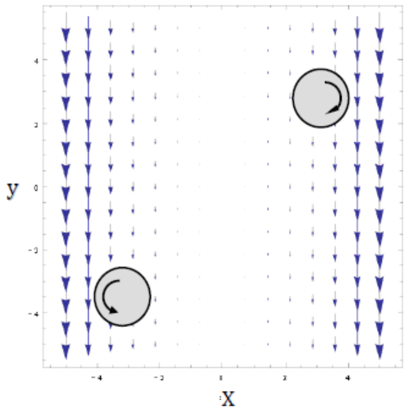
Παράδειγμα

$$\vec{F} = y\,\hat{i} - x\,\hat{j}$$

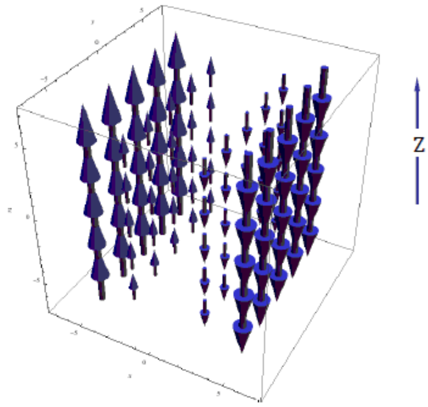
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k}$$

παράδειγμα

$\boxed{\vec{F} = -x^2\,\hat{j}}$



$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{F} = -2x\hat{k}}$



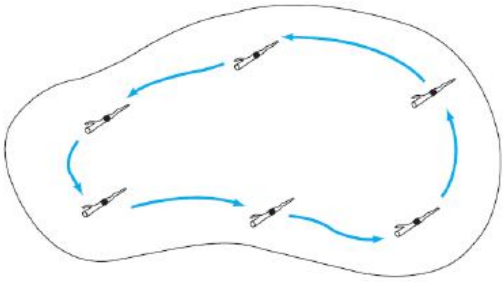
Αριθμητικό Παράδειγμα

$$\vec{F} = x^2 y\,\hat{i} - 2xz\,\hat{j} + (x+y-z)\hat{k}$$

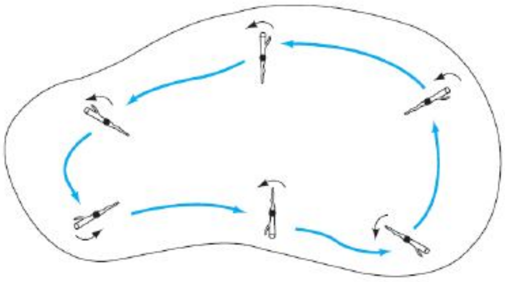
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & -2xz & x+y-z \end{vmatrix} = (2x+1)\hat{i} - \hat{j} - (x^2+2z)\hat{k}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Σχηματικό παράδειγμα κίνησης ενός κλαδιού δέντρου στο υδάτινο ρεύμα μιας λίμνης. Το κλαδί ακολουθεί την πορεία που καθορίζει το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού στην επιφάνεια της λίμνης. Εάν ο προσανατολισμός του κλαδιού δεν αλλάζει (αριστερά), τότε δεν υπάρχει στροβιλισμός στο πεδίο των ταχυτήτων (curl**F**=**0**). Στην αντίθετη περίπτωση ύπαρξης στροβιλισμού (δεξιά), το κλαδί πέραν από την μεταφορική εκτελεί και περιστροφική κίνηση.



$\mathrm{curl}\vec{F} = \vec{0}$



$\mathrm{curl}\vec{F} \neq \vec{0}$

Τελεστής Laplace (Λαπλάς)

Ο τελεστής Λαπλάς συμβολίζεται με Δ και ισούται με $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$, δηλαδή είναι η απόκλιση της κλίσης μιας συνάρτησης.

Λαπλασιανός τελεστής, $\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv div\ grad$

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla \equiv \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

Έτσι, η ποσότητα $$\nabla^2\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

ονομάζεται *Λαπλασιανή* του ψ . Είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Ο τελεστής Laplace σε διανυσματική συνάρτηση είναι σαν να εφαρμόζεται σε κάθε συνιστώσα της

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x \hat{i} + \vec{\upsilon}_y \hat{j} + \vec{\upsilon}_z \hat{k} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z),$$

$$\nabla^2\vec{\upsilon} = \nabla^2\vec{\upsilon}_x \hat{i} + \nabla^2\vec{\upsilon}_y \hat{j} + \nabla^2\vec{\upsilon}_z \hat{k} = (\nabla^2\upsilon_x, \nabla^2\upsilon_y, \nabla^2\upsilon_z)$$

$$\nabla^2\vec{\upsilon} = \left(\frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\upsilon_x}{\partial z^2}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial^2\upsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\upsilon_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\upsilon_y}{\partial z^2}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\upsilon_z}{\partial z^2}\right)\hat{k}$$

άσκηση:
Να δείξετε ότι ο στροβιλισμός της βάθμωσης ενός βαθμωτού πεδίου είναι μηδέν.
Να δείξετε ότι η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου είναι μηδέν.

άσκηση:

Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{r}/r^2$ είναι αστρόβιλο.

Λύση: Έχουμε $\boldsymbol{f}=\dfrac{(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)}{x^2+y^2+z^2}$

Είναι $f_1=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $f_2=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$, $f_3=\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}$

Ισχύει $\dfrac{\partial f_3}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial z}=\dfrac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial z}=\dfrac{\partial f_3}{\partial x}=\dfrac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}=\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

και προκύπτει $\mathbf{rot f}=0$.

άσκηση:

Θεωρούμε το (δισδιάστατο) πεδίο δυνάμεων: $\vec{F}=(\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{-x}{x^2+y^2})$, στο $R^2-\{(0,0)\}$

δείξτε ότι ο στροβιλισμός του είναι μηδέν, αλλά ότι δεν είναι συντηρητικό

Υπόδειξη: Πρώτα με βάση τον ορισμό δείχνουμε το στροβιλισμό μηδέν. Μετά για κυκλική διαδρομή με κέντρο το (0,0), και κάποια συγκεκριμένη ακτίνα, οπότε το μέτρο της F είναι σταθερό, βρίσκουμε το $d\vec{r}$ =(dx, dy), δείχνουμε ότι είναι παράλληλα τα $\vec{F}$ και $d\vec{r}$, με συντελεστή διεύθυνσης και μετά το dW και ολοκληρώνοντας για το W αποδεικνύεται διάφορο του μηδενός. ($x^2+y^2=\rho^2$, 2xdx+2ydy=0 για τη διεύθυνση του $d\vec{r}$) $dW=\vec{F}d\vec{r}=Fdr$ ή $-Fdr$, άρα $W=\oint dW=\oint Fdr=F\oint dr=F2\pi r$

Να αποδειχθεί ότι:

α) $\nabla\cdot\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}\right)=0$ β) $\nabla\times\left(\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}\right)=\mathbf{0}$ γ) $\nabla^2\left(\dfrac{1}{r}\right)=0$

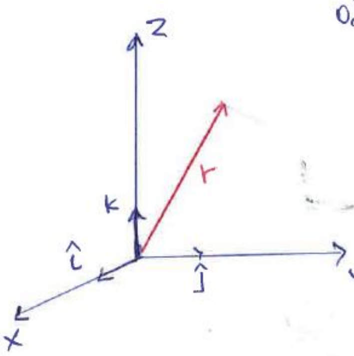
άσκηση 1: Να βρεθεί η F (στον άξονα χ) αν προέρχεται από το δυναμικό $U=20\cdot e^{-5x^2}$
απάντηση: $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=-\dfrac{dU}{dx}\hat{i}$

άσκηση 2: Να βρεθεί η F (στο επίπεδο χ,y), αν προέρχεται από το δυναμικό $U(x,y)=\dfrac{4}{x^2+(y-3)^2}$

απάντηση: $\vec{F}=-\vec{\nabla}U=-(\dfrac{\partial U}{\partial x}\hat{i}+\dfrac{\partial U}{\partial y}\hat{j})$, $F_{o\lambda}=\sqrt{F_x^2+F_y^2}$, $\varepsilon\varphi\theta=\dfrac{F_y}{F_x}$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση: Σε μια συνάρτηση f(x,y,z)

Η f(x,y,z) αυξάνεται περισσότερο προς την κατεύθυνση της κλίσης ∇ f(x,y).
Η f(x,y,z) μειώνεται περισσότερο προς την αντίθετη κατεύθυνση του ∇ f(x,y).
Ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδενικός όταν φ=π/2 ή φ=3π/2 (κάθετη κατεύθυνση)
Όταν η κατεύθυνση είναι τυχαία:



Ολικό διαφορικό συνάρτησης f(x,ψ,z)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial \psi}d\psi + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $\vec{r} = x\hat{i} + \psi\hat{j} + z\hat{k}$

τότε $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + d\psi\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$

$dr = |d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (d\psi)^2 + (dz)^2}$

Επομένως:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial \psi}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(dx\,\hat{i} + d\psi\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\right)$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Άρα $\dfrac{df}{dr} = \vec{\nabla} f \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dr} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dr} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi}\dfrac{d\psi}{dr} + \dfrac{\partial z}{\partial z}\dfrac{dz}{dr}$

Σε κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με το $\vec{\nabla} f$: $\left(\dfrac{df}{dr}\right)_\theta = |\vec{\nabla} f|\cos\theta$

και είναι μέγιστη στην κατεύθυνση $\vec{\nabla} f$, όπου θ=0.

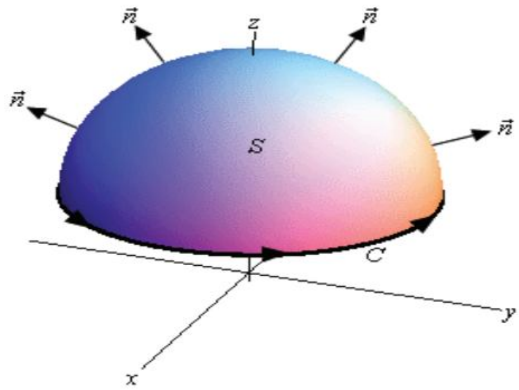
Οπότε $\left(\dfrac{df}{dr}\right)_{max} = |\vec{\nabla} f|$ κατά τη διεύθυνση που είναι κάθετη στις ισοσταθμικές επιφάνειες, δηλαδή εκεί που το f = σταθερό

Θεώρημα Stokes

Αν S είναι μια επιφάνεια, που έχει για σύνορο μια απλή κλειστή καμπύλη C και $\vec{F}$ ένα διανυσματικό πεδίο, που ορίζεται πάνω στην S και έχει παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς συναρτήσεις, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης κατά μήκος της κλειστής καμπύλης ισούται με τη ροή του στροβιλισμού της συνάρτησης μέσα από την επιφάνεια.

Η φορά της C ορίζεται ως η φορά στροφής δεξιόστροφου κοχλία που βιδώνει προς το διάνυσμα που αντιστοιχεί στην επιφάνεια S.

Αν $\vec{n}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S:

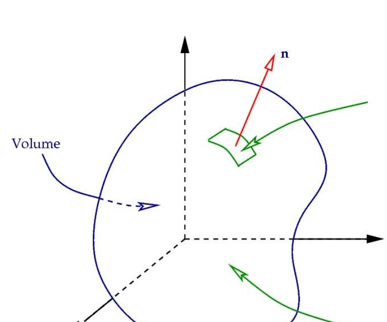


$$\oint_{C(S)} \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\mathrm{curl}\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_S (\mathrm{curl}\vec{F})\cdot\vec{n}\cdot dS$$

Θεώρημα Gauss

Έστω V ένα συμπαγές (compact) στερεό που περιβάλλεται εξωτερικά από μια κλειστή κατά τμήματα λεία επιφάνεια S. Τότε αν $\vec{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στο V και έχει παραγώγους συνεχείς συναρτήσεις ισχύει:

Η ροή του διανυσματικού πεδίου προς το εξωτερικό της κλειστής επιφάνειας S ισούται με το ολοκλήρωμα απόκλισης της συνάρτησης στον περιεχόμενο από την επιφάνεια όγκο



$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \oint\!\!\oint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \oint\!\!\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds$$

$$\oint_S \vec{F}\cdot d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,d^3x$$