“Ανεβαίνοντας” και “κατεβαίνοντας” χρονικές εξισώσεις

Δύο κινητά (που θεωρούμε σημειακά) το Α και το Β, κινούνται κατά μήκος ενός προσανατολισμένου άξονα $x'Ox$. Η εξίσωση κίνησης του κινητού Α είναι η

$$x_A = -2{,}5 - 4t + 2t^2 \ \ (S.I.),\ \ 0 \le t \le 4s,$$

ενώ το Β κινείται με σταθερή επιτάχυνση αλγεβρικής τιμής $a_B = -3m/s^2$.

Α. Να γράψετε τις χρονικές εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του κινητού Α, για το χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως και $t_2 = 4s$.

Β. Να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή που το κινητό Α αλλάζει φορά κίνησης και να περιγράψετε το είδος της κίνησής του στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως και $t_2 = 4s$.

Το κινητό Β τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ βρίσκεται στη θέση $x_{0,B} = -10m$ και μηδενίζει την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$.

Γ. Να γράψετε την εξίσωση της ταχύτητας του κινητού Β σε συνάρτηση με το χρόνο και την εξίσωση κίνησής του, για το χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως και $t_2 = 4s$.

Δ. Να αποδείξετε ότι τα δύο κινητά δεν θα συναντηθούν.

Ε. Να υπολογίσετε την απόσταση των δύο κινητών τη χρονική στιγμή $t_2 = 4s$.

Απάντηση

Α. Από με τη δοθείσα εξίσωση κίνησης του κινητού Α, αντιλαμβανόμαστε ότι το κινητό εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με γενική εξίσωση κίνησης της μορφής

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Συγκρίνοντας λοιπόν τη δοθείσα με την αντίστοιχη θεωρητική, προκύπτει ότι

$$x_{0,A} = -2{,}5m, \upsilon_{0,A} = -4m/s \ \text{ και } \ \frac{a_A}{2} = 2m/s^2 \ \text{ ή } \ a_A = 4m/s^2$$

Επομένως, η εξίσωση της ταχύτητας του κινητού Α σε συνάρτηση με το χρόνο θα είναι της μορφής $\upsilon_A = \upsilon_{0,A} + a_A t$. Δηλαδή, θα είναι η παρακάτω

$$\boxed{\upsilon_A = -4 + 4t \ \ (S.I.)}, 0 \le t \le 4s$$

Η επιτάχυνσή του θα είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου) στο χρονικό διάστημα από $t_0 = 0$ έως και $t_2 = 4s$ και όπως αναφέρθηκε θα έχει τιμή ίση με $\boxed{a_A = 4m/s^2}$.

Β. Η φορά κίνησης ενός σώματος που κινείται ευθύγραμμα, καθορίζεται από το πρόσημο της αλγεβρικής τιμής της ταχύτητάς του. Το κινητό Α αρχικά κινείται προς τα αρνητικά του άξονα, έχοντας όμως θετική επιτάχυνση. Η φορά της κίνησής του θα αλλάξει τη χρονική στιγμή που μηδενίζει την ταχύτητά του.

Επομένως και σύμφωνα με την παραπάνω χρονική εξίσωση της ταχύτητας, η στιγμή της αλλαγής στη φορά κίνησης του Α είναι η:

$$\upsilon_A = 0 \Longrightarrow -4 + 4t' = 0 \Longrightarrow \boxed{t' = 1s}$$

Μία ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση χαρακτηρίζεται ως επιταχυνόμενη όταν η ταχύτητα του κινητού είναι ομόρροπη της επιτάχυνσής του (ομόσημες αλγεβρικές τιμές), ενώ ως επιβραδυνόμενη όταν η ταχύτητα του κινητού είναι αντίρροπη της επιτάχυνσής του (ετερόσημες αλγεβρικές τιμές).

Σε όλη τη διάρκεια της κίνησής του το σώμα Α έχει θετική επιτάχυνση. Άρα, στο χρονικό διάστημα που έχει αρνητική ταχύτητα θα επιβραδύνεται, ενώ στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα που κινείται προς τα θετικά θα επιταχύνεται.

Επομένως, από $t_0 = 0$ έως και $t' = 1s$ το κινητό Α εκτελεί <u>ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση</u> προς τα αρνητικά ($\upsilon_A < 0$ και $a_A > 0$), ενώ από $t' = 1s$ έως και $t_2 = 4s$ εκτελεί <u>ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση</u> προς τα θετικά ($\upsilon_A > 0$ και $a_A > 0$).

Γ. Ομοίως και το κινητό Β εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση. Επομένως, η εξίσωση της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο θα είναι της μορφής $\upsilon_B = \upsilon_{0,B} + a_B t$ και η αντίστοιχη εξίσωση κίνησής του της μορφής $x_B = x_{0,B} + \upsilon_{0,B} t + \frac{1}{2} a_B t^2$.

Με δεδομένο ότι το κινητό Β μηδενίζει την ταχύτητά του τη χρονική στιγμή $t_1 = 2s$ (στιγμή αλλαγής της φοράς κίνησης) προκύπτει ότι

$$\upsilon_B = 0 \Longrightarrow 0 = \upsilon_{0,B} + a_B t_1 \Longrightarrow 0 = \upsilon_{0,B} + (-3m/s^2) \cdot 2s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_{0,B} = 6m/s$$

Έτσι, η ζητούμενη εξίσωση της ταχύτητας του Β σε συνάρτηση με το χρόνο είναι η

$$\boxed{\upsilon_B = 6 - 3t \ \ (S.I.)}, 0 \leq t \leq 4s$$

Για τη ζητούμενη εξίσωση κίνησης του Β σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε:

$$x_B = x_{0,B} + \upsilon_{0,B} t + \frac{1}{2} a_B t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_B = -10 + 6t - 1{,}5t^2 \ \ (S.I.)}, 0 \leq t \leq 4s$$

Δ. Για να συναντηθούν δύο σώματα, θα πρέπει να βρεθούν στην ίδια θέση την ίδια χρονική στιγμή. Επομένως, για να αποδείξουμε ότι τα δύο κινητά δεν θα συναντηθούν, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $x_A = x_B$ είναι αδύνατη.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εξίσωση αυτή γράφεται ως

$$-2{,}5 - 4t + 2t^2 = -10 + 6t - 1{,}5t^2 \Rightarrow 3{,}5t^2 - 10t + 7{,}5 = 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι δευτεροβάθμια, με διακρίνουσα

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3{,}5 \cdot 7{,}5 = 100 - 105 = -5 < 0$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη (για $0 \leq t \leq 4s$), με αποτέλεσμα τα δύο κινητά να μην βρεθούν ποτέ ταυτόχρονα στην ίδια θέση.

Ε. Η απόσταση των δύο κινητών στον άξονα θα είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με

$$d = |x_A - x_B|$$

Έτσι, αρκεί να προσδιορίσουμε τη θέση των κινητών τη στιγμή $t_2 = 4s$.

Το κινητό Α θα βρίσκεται στη θέση

$$x_A = -2{,}5 - 4t_2 + 2t_2^2 \Rightarrow x_A = -2{,}5 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_A = -2{,}5m - 16m + 32m \Rightarrow x_A = 13{,}5m$$

Αντίστοιχα, το κινητό Β θα βρίσκεται τότε στη θέση

$$x_B = -10 + 6t_2 - 1{,}5t_2^2 \Rightarrow x_B = -10 + 6 \cdot 4 - 1{,}5 \cdot 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_B = -10m + 24m - 24m \Rightarrow x_B = -10m$$

Άρα, η ζητούμενη απόσταση των κινητών θα είναι ίση με

$$d = |x_A - x_B| \Rightarrow d = |13{,}5m - (-10m)| \Rightarrow \boxed{d = 23{,}5m}$$

Μίλτος Καδιλτζόγλου

miltoskadiltzoglou@gmail.com