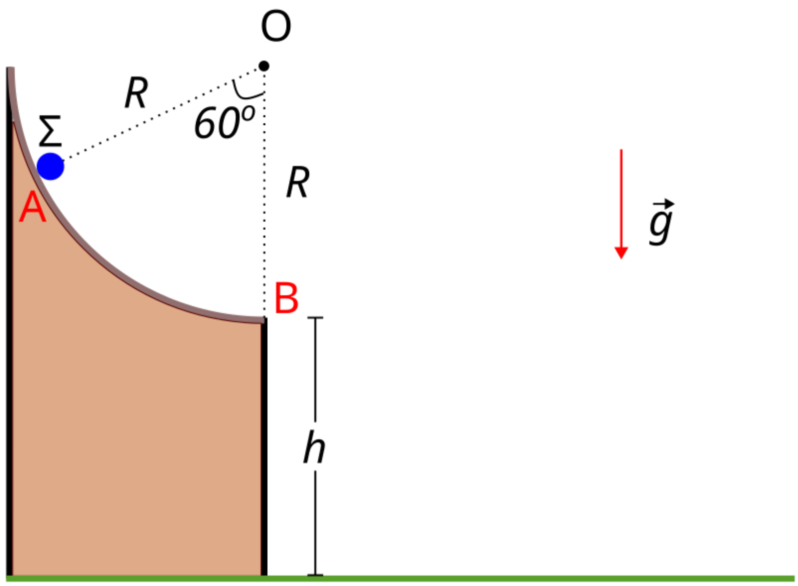
# Να δείξετε ότι δεν εκτελεί οριζόντια βολή

Το σώμα Σ του σχήματος έχει αμελητέες διαστάσεις, μάζα $m = 0{,}5kg$ και αφήνεται στο σημείο Α ενός κατακόρυφου ημικυκλίου κέντρου Ο και ακτίνας $R = 0{,}9m$. Το ημικύκλιο είναι υπερυψωμένο, με το χαμηλότερο άκρο του Β να απέχει $h = 0{,}8m$ από το έδαφος. Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ έχει μέτρο 60°.




1) Εάν το ημικύκλιο **είναι λείο**,:

**Α1.** να υπολογίσετε την ορμή και τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος Σ στο άκρο Β.

Το σώμα Σ, εγκαταλείποντας το ημικύκλιο, εκτελεί οριζόντια βολή και συναντά το έδαφος σε ένα σημείο Γ αυτού.

**Β1.** Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου Γ από το σημείο Β.

**Γ1.** Να υπολογίσετε την ορμή του σώματος Σ ακριβώς πριν από την πρόσκρουσή του στο έδαφος στο σημείο Γ και το ρυθμό μεταβολής της ορμής του την ίδια χρονική στιγμή.

2) Εάν το ημικύκλιο **είναι τραχύ** και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης (ο οποίο ισούται με τον συντελεστή οριακής τριβής) μεταξύ του σώματος Σ και του ημικυκλίου είναι $\mu = 1$,:

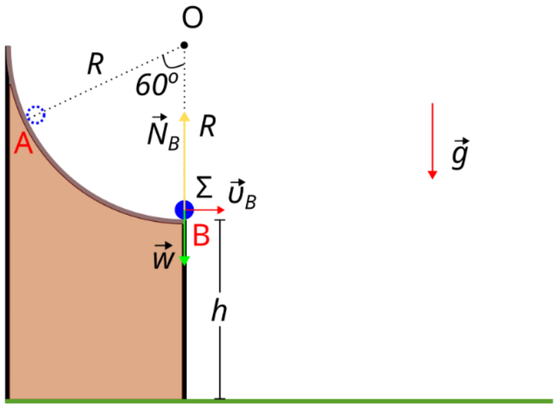
**Α2.** να αποδείξετε ότι το σώμα Σ δεν θα εκτελέσει οριζόντια βολή εάν αφεθεί ελεύθερο στη θέση Α.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10m/s^2$ και η αντίσταση του αέρα θεωρείται αμελητέα.

## *Απάντηση*

1)

**Α1.** Με εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. κατά την κίνηση του σώματος Σ από το Α στο Β και ορίζοντας επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο που διέρχεται από το Β, η ταχύτητα του Σ στο Β προκύπτει ίση με:




$$E_{\mu\eta\chi,A} = E_{\mu\eta\chi,B} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow mg(R - R \cdot \sigma\upsilon\nu 60°) = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\upsilon_B^2 = \frac{1}{2}gR \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \upsilon_B = \sqrt{gR} \Longrightarrow \upsilon_B = \sqrt{9}m/s = 3m/s$$

Επομένως, η ζητούμενη ορμή του σώματος στη θέση Β είναι οριζόντια (με φορά προς τα δεξιά – με βάση το σχήμα) και έχει μέτρο:

$$p_B = m\upsilon_B = 0{,}5kg \cdot 3m/s \Longrightarrow \boxed{p_B = 1{,}5kg \cdot m/s}$$

Επίσης, από το 2ο νόμο Newton στη γενικευμένη μορφή, έχουμε ότι ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος Σ είναι ίσος με την συνισταμένη δύναμη που του ασκείται. Επειδή το σώμα εκτελεί κυκλική κίνηση κατά μήκος του λείου ημικυκλίου, αντιλαμβανόμαστε ότι η συνισταμένη δύναμη που του ασκείται στη θέση Β είναι η αντίστοιχη κεντρομόλος δύναμη που ασκείται στο σώμα εκείνη τη στιγμή. Άρα

$$\frac{dp_B}{dt} = \Sigma F = N_B - w = F_{\kappa,B} \Longrightarrow \frac{dp_B}{dt} = m\frac{\upsilon_B^2}{R} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{dp_B}{dt} = 0{,}5 \cdot \frac{9}{0{,}9}kg \cdot \frac{m}{s^2} \Longrightarrow \boxed{\frac{dp_B}{dt} = 5kg \cdot m/s^2}$$

Πρόκειται για ένα <u>κατακόρυφο διάνυσμα με φορά προς τα πάνω</u>.

**Β1.** Το σώμα Σ, εγκαταλείποντας το ημικύκλιο, θα εκτελέσει οριζόντια βολή από ύψος $h = 0{,}8m$ και με αρχική ταχύτητα $\upsilon_B = 3m/s$. Έτσι, θα φθάσει στο έδαφος και συγκεκριμένα στο σημείο Γ, μετά από χρόνο

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}8}{10}} s \Longrightarrow \Delta t = 0{,}4s$$

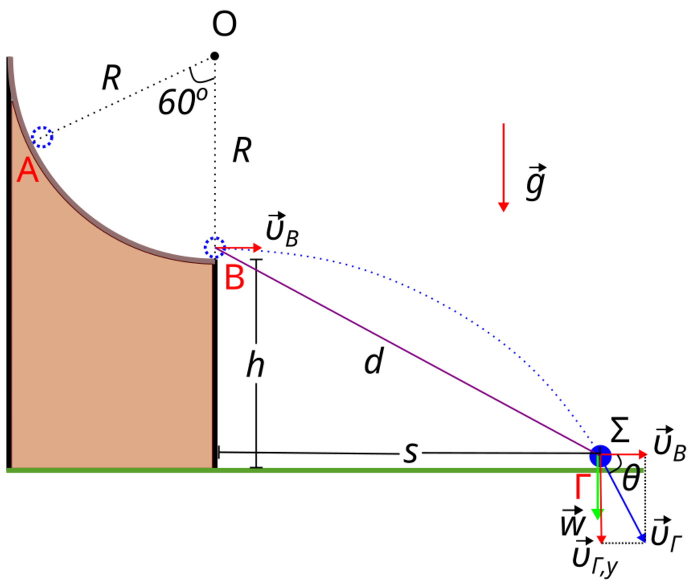
από τη στιγμή που εγκατέλειψε το ημικύκλιο.

Η οριζόντια απόσταση του σημείου Γ από το σημείο Β (βεληνεκές), θα είναι ίση με

$$s = \upsilon_B \cdot \Delta t \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s = 3m/s \cdot 0{,}4s \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow s = 1{,}2m$$




Επομένως, η ζητούμενη απόσταση $(Β\Gamma) = d$ είναι ίση με

$$d = \sqrt{s^2 + h^2} = \sqrt{1{,}2^2 + 0{,}8^2} m = \sqrt{(144 + 64) \cdot 10^{-2}} m \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow d = \frac{\sqrt{208}}{10} m \Longrightarrow \boxed{d = 0{,}4\sqrt{13}m}$$

**Γ1.** Το μέτρο της ταχύτητας του σώματος στο Γ, θα είναι ίσο με

$$\upsilon_\Gamma = \sqrt{\upsilon_{\Gamma,x}^2 + \upsilon_{\Gamma,y}^2} = \sqrt{\upsilon_B^2 + (g \cdot \Delta t)^2} \Longrightarrow \upsilon_\Gamma = \sqrt{3^2 + 4^2} m/s \Longrightarrow \upsilon_\Gamma = 5m/s$$

Οπότε, το μέτρο της ορμής του σώματος Σ στο Γ ισούται με

$$p_\Gamma = m\upsilon_\Gamma = 0{,}5kg \cdot 5m/s \Longrightarrow \boxed{p_\Gamma = 2{,}5kg \cdot m/s}$$

Το διάνυσμα της ορμής του σώματος τότε θα είναι εφαπτόμενο της τροχιάς του (παραβολή) και θα σχηματίζει γωνία $\theta$ με την οριζόντια διεύθυνση, για την οποία

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{p_{\Gamma,y}}{p_{\Gamma,x}} = \frac{\upsilon_{\Gamma,y}}{\upsilon_{\Gamma,x}} \Longrightarrow \boxed{\varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}}$$

Τέλος, για το ζητούμενο ρυθμό μεταβολής της ορμής εκείνη τη στιγμή, με εφαρμογή πάλι του Θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής στη γενικευμένη μορφή, έχουμε ότι:

$$\frac{dp_\Gamma}{dt} = \Sigma F = w = mg \Longrightarrow \boxed{\frac{dp_\Gamma}{dt} = 5kg \cdot m/s^2}$$

Πρόκειται για ένα <u>κατακόρυφο διάνυσμα με φορά προς τα κάτω</u>.

2)

**Α2.** Για να αποδείξουμε ότι το σώμα Σ δεν θα εκτελέσει οριζόντια βολή, αρκεί να δείξουμε ότι δεν φθάνει στο σημείο Β του ημικυκλίου με κάποια μη μηδενική (προς τα δεξιά) ταχύτητα.

Αρχικά, θα ελέγξουμε εάν το σώμα ξεκινάει να κινείται από το σημείο Α. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει

$$w_x > T_{op,A} \Rightarrow mg \cdot \eta\mu 60° > \mu N_A \quad (1)$$

Επειδή το σώμα Σ δεν έχει ταχύτητα στο σημείο Α, συμπεραίνουμε ότι $\Sigma F_y = 0$ ή $N_A = w_y = mg \cdot \sigma\upsilon\nu 60°$. Έτσι, η σχέση (1) γίνεται:

$$mg \cdot \eta\mu 60° > \mu mg \cdot \sigma\upsilon\nu 60° \Rightarrow \varepsilon\varphi 60° > 1 \Rightarrow \sqrt{3} > 1$$

που ισχύει, άρα το σώμα σίγουρα αρχίζει να κατέρχεται από το Α προς το Β.

Κατά την κάθοδό του το σώμα Σ αρχικά επιταχύνεται και εκτελεί κυκλική κίνηση. Έτσι, η κάθετη αντίδραση $N$ από το ημικύκλιο γίνεται μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ακτινική συνιστώσα του βάρους (η οποία με τη σειρά της αυξάνεται), ώστε να δέχεται το σώμα κεντρομόλο δύναμη. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της κάθετης αντίδρασης και την αύξηση της τριβής ολίσθησης. Άρα, ο υπολογισμός του έργου της μεταβλητής τριβής ολίσθησης που ασκείται στο σώμα κατά την κάθοδό του φαντάζει δύσκολος.

Εάν το σώμα φθάσει στο σημείο Β, το βάρος θα του έχει προσφέρει έως τότε ενέργεια (μέσω του έργου του) ίση με:

$$W_{\vec{w},A\to B} = mg(R - R \cdot \sigma\upsilon\nu 60°) \Rightarrow W_{\vec{w},A\to B} = \frac{1}{2} mgR \quad (2)$$

Για να μην φθάσει το σώμα στο Β, αρκεί η τριβή (μέσω του έργου της) να καταναλώνει περισσότερη ενέργεια από αυτή που προσφέρει στο σώμα το βάρος κατά την (υποθετική) κίνησή του από το Α στο Β. Δηλαδή, αρκεί

$$\left| W_{\vec{T}_{o\lambda},A\to B} \right| > W_{\vec{w},A\to B}$$

Όπως είδαμε, το μέτρο της τριβής αυξάνεται. Δηλαδή, σε μία τυχαία θέση $T_{o\lambda} > T_{o\lambda,A}$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η προσφερόμενη ενέργεια από το βάρος είναι μικρότερη από το κατώτερο όριο της ενέργειας που καταναλώνει η τριβή (υποθέτωντας ότι η τριβή παραμένει σταθερή και ίση με την αρχική ελάχιστή της τιμή). Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$W_{\vec{w},A\to B} < \left| W_{\vec{T}_{o\lambda}} \right|_{\kappa\alpha\tau}$$

Όμως

$$\left|W_{\vec{T}_{ολ}}\right|_{κατ} = T_{ολ,A} \cdot S_{AB} = \mu N_A \cdot \frac{\pi R}{3} = \mu mg \cdot συν60° \cdot \frac{\pi R}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} mgR \quad (3)$$

Όπου για το μήκος του τόξου $AB$ έγινε χρήση της σχέση $S = \varphi R$ με $\varphi$ σε ακτίνια.

Από τις παραπάνω σχέσεις (2) και (3), προκύπτει ότι όντως $W_{\vec{w},A\to B} < \left|W_{\vec{T}_{ολ}}\right|_{κατ}$.

Δηλαδή ικανοποιείται η σχέση

$$\boxed{W_{\vec{w},A\to B} < \left|W_{\vec{T}_{ολ}}\right|_{κατ} < \left|W_{\vec{T}_{ολ},A\to B}\right|}$$

Επομένως, αν και το σώμα ξεκινάει από το σημείο Α, συμπεραίνουμε ότι δεν αποκτά αρκετή ενέργεια ώστε να μπορέσει να φθάσει στο σημείο Β και να εκτελέσει στη συνέχεια οριζόντια βολή.

***Μίλτος Καδιλτζόγλου***

***miltoskadiltzoglou@gmail.com***