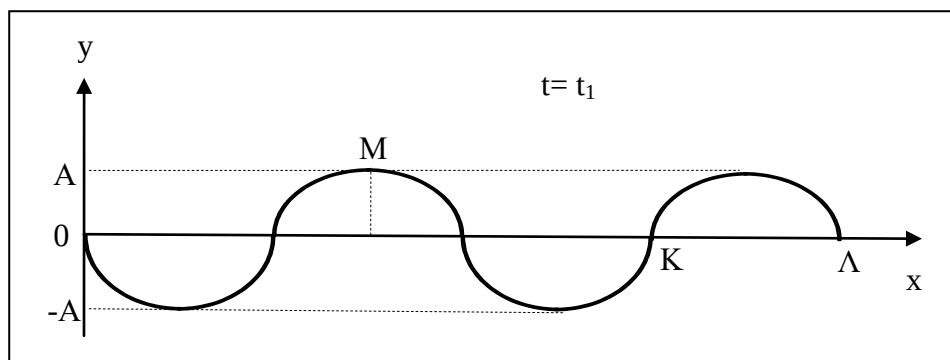


“Διαβάζοντας” ένα στιγμιότυπο τρέχοντος κύματος Εννιά απλές ερωτήσεις και μια πιο δύσκολη

Τη χρονική στιγμή $t=0$ η αρχή O ($x=0$) μιας ομογενούς, ελαστικής χορδής αρχίζει να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$, κάθετα στη διεύθυνση της χορδής. Το κύμα που παράγεται διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x ’Ο x με περίοδο T και μήκος κύματος λ . Τη χρονική στιγμή t_1 το στιγμιότυπο του κύματος δείχνεται στο παρακάτω σχήμα. Όλα οι απαντήσεις να δοθούν σε συνάρτηση με τα λ , T , A .



Ερωτήσεις

1. Ποια είναι η θέση των σημείων M , K και Λ στον άξονα x ;
2. Ποιες χρονικές στιγμές φτάνει το κύμα στα τρία σημεία;
3. Ποια είναι η φορά κίνησης των σημείων M , K και Λ και ποια η αλγεβρική τιμή των ταχυτήτων τους;
4. Ποια είναι η χρονική στιγμή t_1 ;
5. Ποιο είναι το διάστημα που έχουν διαγράψει τα σημεία M και K , κατά την ταλάντωσή τους, από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 ;
6. Πόση είναι η φάση των τριών σημείων τη χρονική στιγμή t_1 ;
7. Ποιο είναι το διάγραμμα φάσης συναρτήσει της θέσης των σημείων για τη χρονική στιγμή t_1 ;
8. Ποιο είναι το κοινό διάγραμμα φάσης συναρτήσει του χρόνου για τα σημεία M και K , από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 ;
9. Ποια είναι η απόσταση των σημείων M και Λ τη χρονική στιγμή t_1 ;
10. Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη απόσταση των σημείων M και Λ , μετά τη χρονική στιγμή t_1 και ποιες είναι οι αντίστοιχες χρονικές στιγμές;

Απαντήσεις

1. Η θέση των σημείων Μ, Κ και Λ φαίνεται άμεσα από το διάγραμμα και είναι $x_M=3\lambda/4$, $x_K=3\lambda/2$ και $x_\Lambda=2\lambda$.

2. Το κύμα κινείται με σταθερή ταχύτητα v , η οποία συνδέεται με τα λ και T με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής, $\lambda=vT$. Η απόσταση που διαδίδεται το κύμα σε χρονικό διάστημα t είναι $x=vt$. Άρα, το κύμα φτάνει στα τρία σημεία τις χρονικές στιγμές

$$t_M = \frac{x_M}{v} = \frac{\frac{3\lambda}{4}}{v} = \frac{3T}{4}$$

$$t_K = \frac{x_K}{v} = \frac{\frac{3\lambda}{2}}{v} = \frac{3T}{2}$$

$$t_\Lambda = \frac{x_\Lambda}{v} = \frac{2\lambda}{v} = 2T$$

3. Κάθε υλικό σημείο του μέσου, στο οποίο διαδίδεται το εγκάρσιο αρμονικό κύμα, κινείται προς το αμέσως προηγούμενό του, γιατί δέχεται ελαστικές δυνάμεις απ' αυτό. Άρα, το σημείο Κ κινείται προς τα κάτω και αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του έχει ταχύτητα μέγιστου μέτρου

$$v_K = -v_{\max} = -\omega A = -\frac{2\pi}{T} A$$

Ομοίως, το σημείο Λ κινείται προς τα πάνω, με ταχύτητα μέγιστου μέτρου, αφού το κύμα μόλις έχει φτάσει στο σημείο αυτό

$$v_\Lambda = v_{\max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} A$$

Τέλος, το σημείο Μ είναι ακίνητο, καθώς βρίσκεται στην ακραία θετική θέση της ταλάντωσής του.

4. Το κύμα κινείται με σταθερή ταχύτητα v και έχει διαδοθεί σε απόσταση $x_\Lambda=2\lambda$. Άρα, η χρονική στιγμή t_1 ισούται με

$$t_1 = \frac{x_\Lambda}{v} = \frac{2\lambda}{v} = 2T$$

5. Το σημείο Μ από τη στιγμή $t_M = \frac{3T}{4}$, που ξεκίνησε να ταλαντώνεται, ως τη

χρονική στιγμή $t_1=2T$ έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα

$\Delta t=t_1-t_M=2T-3T/4=5T/4$ και έχει διαγράψει διάστημα ίσο με $5A$.

Το σημείο Κ από τη στιγμή $t_K = \frac{3T}{2}$, που ξεκίνησε να ταλαντώνεται, ως τη χρονική

στιγμή $t_1=2T$ έχει ταλαντωθεί για χρονικό διάστημα

$\Delta t=t_1-t_K=2T-3T/2=T/2$ και έχει διαγράψει διάστημα ίσο με $2A$.

6. Η φάση των σημείων που ταλαντώνονται δίνεται από τη σχέση

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Αν θέσουμε στην εξίσωση τη χρονική στιγμή $t_1=2T$ και τη θέση του κάθε σημείου βρίσκουμε

$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{2T}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda}\right) = 2,5\pi \text{ rad}$$

$$\varphi_K = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{2T}{T} - \frac{3\lambda/2}{\lambda}\right) = \pi \text{ rad}$$

$$\varphi_\Lambda = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{2T}{T} - \frac{2\lambda}{\lambda}\right) = 0$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η φάση του σημείου Λ είναι μηδέν, καθώς το κύμα μόλις έφτασε στο Λ και αυτό τώρα ξεκινάει να ταλαντώνεται. Επίσης, η φάση του σημείου Μ είναι η μεγαλύτερη, καθώς το Μ είναι το πλησιέστερο σημείο στην πηγή και ταλαντώνεται για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

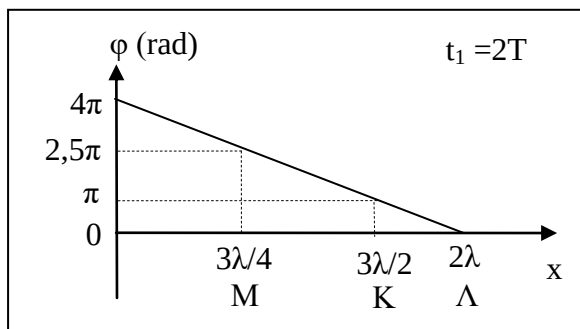
7. Η φάση των σημείων που ταλαντώνονται δίνεται από τη σχέση

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Αν θέσουμε στην εξίσωση τη χρονική στιγμή $t_1=2T$ έχουμε

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\left(\frac{2T}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

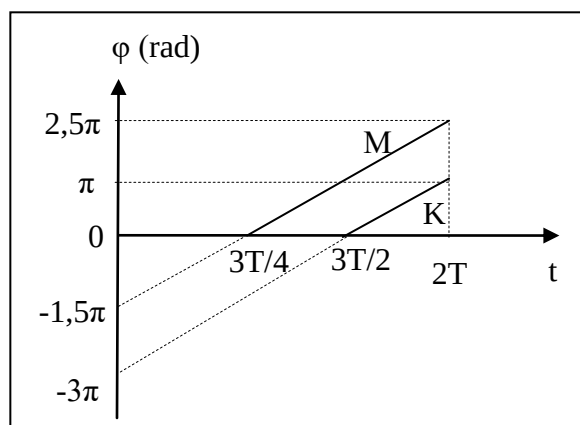
$$\varphi = 4\pi - 2\pi \frac{x}{\lambda}$$



Το διάγραμμα δείχνεται στο παραπάνω σχήμα, όπου φαίνεται ότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα και ότι η φάση των σημείων μικραίνει όσο αυτά είναι πιο μακριά από την πηγή.

8. Το κοινό διάγραμμα φάσης συναρτήσει χρόνου των σημείων Μ και Λ, από τη χρονική στιγμή $t=0$ μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 , δείχνεται στο διπλανό σχήμα.

Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες είναι παράλληλες, καθώς η κλίση της γραφικής παράστασης της φάσης ισούται με $\frac{2\pi}{T} = \omega$, που είναι ίδια



για όλα τα σημεία του μέσου που ταλαντώνεται και γι' αυτό η φάση των δύο σημείων διαφέρει διαρκώς (από τη στιγμή της έναρξης ταλάντωσης και των δύο σημείων)

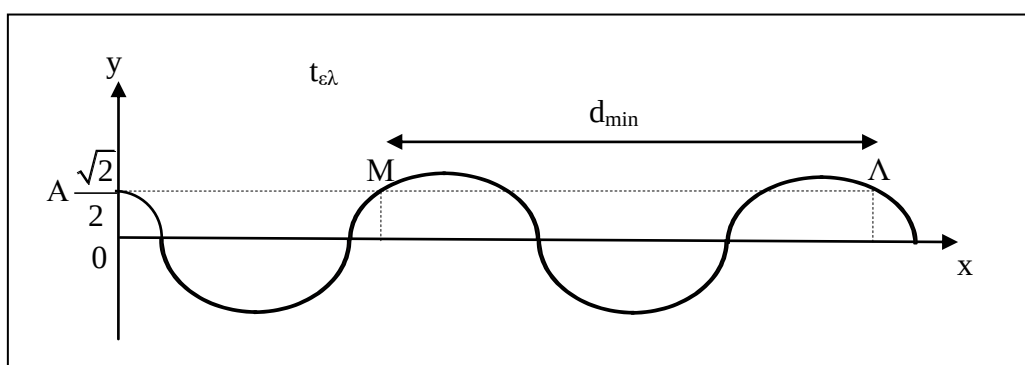
κατά $1,5\pi$ rad. Αν αφαιρέσουμε, άλλωστε, τις σχέσεις των φάσεων των δύο σημείων προκύπτει

$$\Delta\varphi = \varphi_M - \varphi_K = -2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_M - x_K) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{3\lambda/2}{\lambda} - \frac{3\lambda/4}{\lambda} \right) = 1,5\pi \text{ rad}$$

9. Τα σημεία Μ και Λ τη χρονική στιγμή t_1 έχουν απόσταση

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_\Lambda - x_M)^2 + A^2} = \sqrt{\left(2\lambda - \frac{3\lambda}{4}\right)^2 + A^2} = \sqrt{\left(\frac{5\lambda}{4}\right)^2 + A^2}$$

10. Α. Τα σημεία Μ και Λ θα έχουν ελάχιστη απόσταση τη χρονική στιγμή $t_{ελ}$, όταν θα έχουν την ίδια απομάκρυνση $y_M = y_\Lambda$.



Αυτή η απόσταση θα είναι

$$d_{\min} = \Delta x = x_\Lambda - x_M = 2\lambda - 3\lambda/4 = 5\lambda/4.$$

Για να συμβεί η ισότητα $y_M = y_\Lambda$, πρέπει το Μ, κατεβαίνοντας, να έχει αρνητική ταχύτητα και το Λ, ανεβαίνοντας να έχει θετική ταχύτητα. Άρα $v_M = -v_\Lambda$. Είναι

$$y_M = y_\Lambda \Rightarrow A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi + \pi - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi + \pi - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow 4\frac{t}{T} = 2\kappa + 6,5$$

Για να προκύψει η στιγμή $t_{ελ}$ αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 πρέπει $\kappa=1$ και

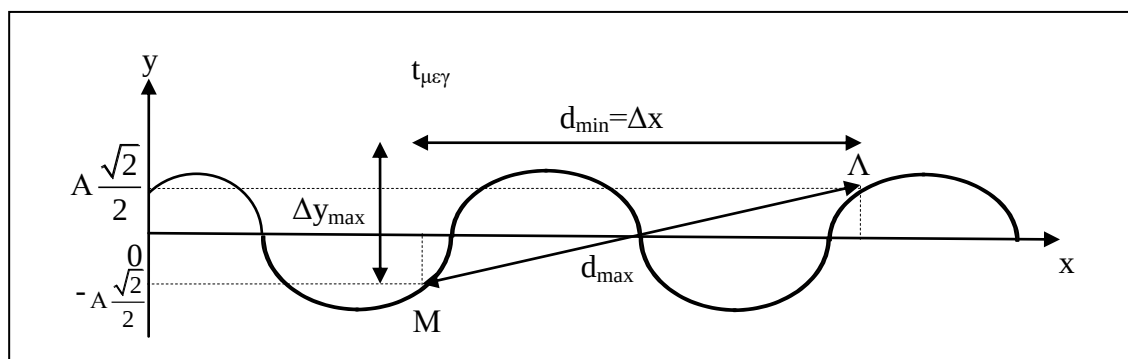
$$\text{προκύπτει } t_{ελ} = \frac{8,5T}{4} = \frac{17T}{8} = t_1 + \frac{T}{8}$$

Οι απομακρύνσεις των δύο σημείων θα είναι

$$y_M = y_\Lambda \Rightarrow A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_{ελ}}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{17T/8}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi \frac{11}{8} = A\eta\mu \frac{11\pi}{4} \Rightarrow$$

$$y_M = y_\Lambda = A\eta\mu \frac{3\pi}{4} = A \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Β. Τα σημεία Μ και Λ θα έχουν μέγιστη απόσταση τη χρονική στιγμή $t_{\mu\epsilon\gamma}$, όταν θα έχουν αντίθετη απομάκρυνση $y_M = -y_\Lambda$ και η ταχύτητά τους θα έχει ίδιο μέτρο. Μετά από αυτή τη στιγμή στον άξονα y θα αρχίσουν να πλησιάζουν.



Για να συμβεί η ισότητα $y_M = -y_\Lambda$, πρέπει το Μ, κατεβαίνοντας, να έχει αρνητική ταχύτητα και το Λ, κατεβαίνοντας να έχει επίσης αρνητική ταχύτητα. Άρα $v_M = v_\Lambda$. Είναι

$$y_M = -y_\Lambda \Rightarrow A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = A\eta\mu\left[-2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right)\right] \Rightarrow 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_\Lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow$$

$$2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda}\right) = 2\kappa\pi - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2\lambda}{\lambda}\right) \Rightarrow 4\frac{t}{T} = 2\kappa + 5,5$$

Για να προκύψει η στιγμή $t_{\mu\epsilon\gamma}$ αμέσως μετά τη χρονική στιγμή t_1 , πρέπει $\kappa=2$ και προκύπτει $t_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{9,5T}{4} = \frac{19T}{8} = t_1 + \frac{3T}{8}$

Οι απομακρύνσεις των δύο σημείων θα είναι

$$y_M = -y_\Lambda \Rightarrow A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t_{\mu\epsilon\gamma}}{T} - \frac{x_M}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{19T/8}{T} - \frac{3\lambda/4}{\lambda}\right) = A\eta\mu 2\pi\frac{13}{8} = A\eta\mu\frac{13\pi}{4} \Rightarrow$$

$$y_M = -y_\Lambda = A\eta\mu\frac{5\pi}{4} = -A\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα, η μέγιστη απόσταση των δύο σημείων θα είναι

$$d_{\max} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_{\max}^2} = \sqrt{(x_\Lambda - x_M)^2 + \left(2A\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(2\lambda - \frac{3\lambda}{4}\right)^2 + 2A^2} = \sqrt{\left(\frac{5\lambda}{4}\right)^2 + 2A^2}$$

Μιας και είμαστε στο κεφάλαιο των κυμάτων, ένα ποίημα με θέμα τα χρώματα.

Στάλες από χρωματικές απορίες

Πάντα είχα μια αναπάντητη απορία:
τι είναι αυτό που κάνει τα χρώματα τόσο διαφορετικά;
Διάβασα, παρατήρησα, πειραματίστηκα.
Έβαλα διάφορες μπογιές σε διάφανα ποτηράκια
και τις μύριζα, τις ακουμπούσα,
τις δοκίμαζα δισταχτικά με τη γλώσσα μου.
Καμιά διαφορά.

Γιατί οι μπογιές είναι ίδιες σ' όλες τις αισθήσεις
και τα μάτια τις βλέπουν τόσο διαφορετικές;
Και όχι μόνο τις μπογιές,
αλλά και όλα όσα αγκαλιάζουν:
το χαρτί, τα ρούχα, την ψυχή μας την ίδια.
Άλλο να βλέπεις το αιχμηρό πράσινο
ή το απαλό κίτρινο
κι άλλο το κόκκινο το δυνατό.

Ο φυσικός που θα σου πει για ανακλάσεις,
μήκη κύματος και μόρια
δεν μπορεί να εξηγήσει
πώς φτάνει το φως μες στην ψυχή μας
και πώς την επηρεάζει.

Και το λευκό,
που είναι το σύνολο των χρωμάτων
και το μαύρο,
που είναι ό,τι δεν βλέπουμε
μου είναι ακόμη πιο αδιευκρίνιστα.

Το φως το έφτιαξε ο Θεός πρώτα απ' όλα
και ίσως θα 'ναι το τελευταίο
που θα μάθουμε τα μυστικά του.